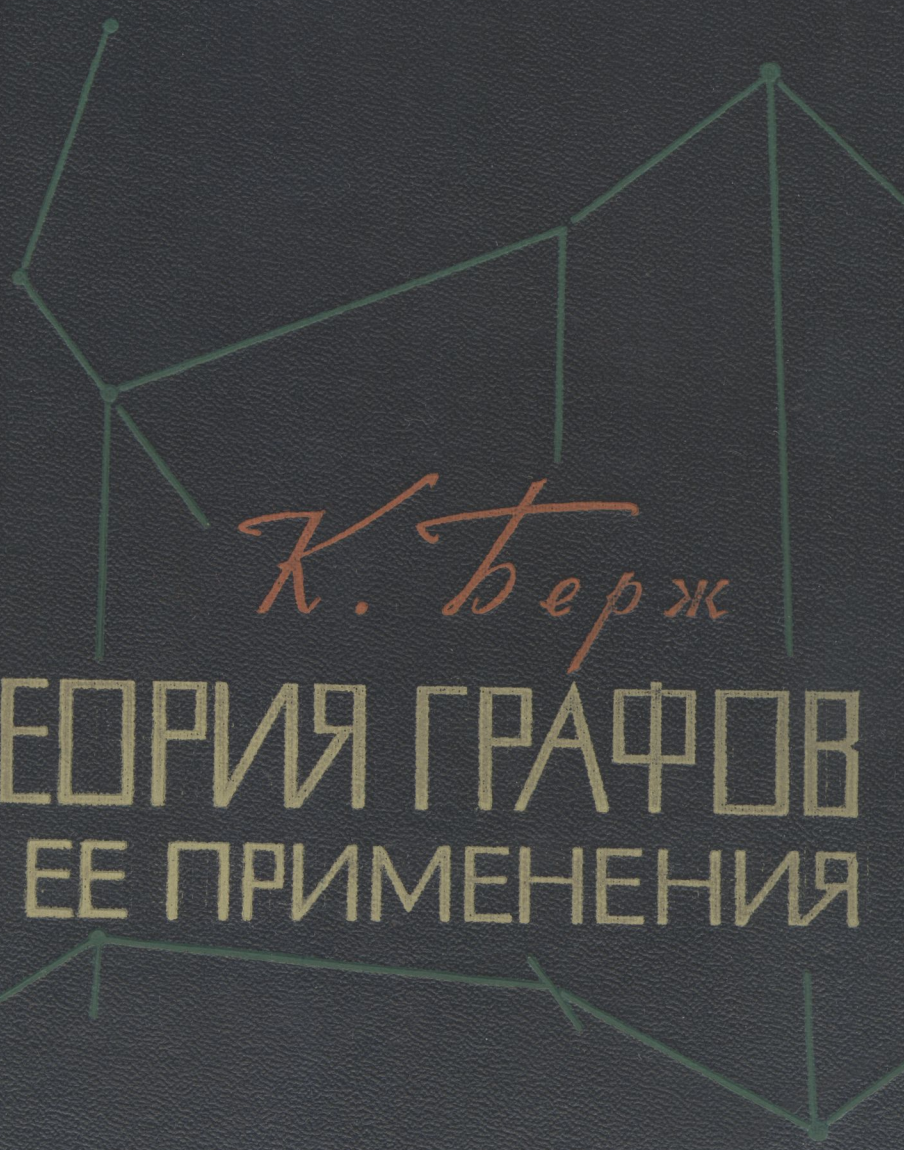


ТЕОРИЯ ГРАФОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ



К. Берж

ТЕОРИЯ ГРАФОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ



CLAUDE BERGE

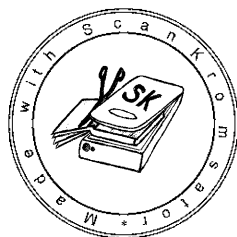
Maître de Recherches au C. N. R. S.

THÉORIE DES GRAPHS
ET
SES APPLICATIONS

DUNOD

Paris

1958



Scan AAW

К. БЕРЖ

ТЕОРИЯ ГРАФОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Перевод с французского
А. А. ЗЫКОВА

Под редакцией
И. А. ВАЙНШТЕЙНА

Издательство
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1962

АННОТАЦИЯ

Книга К. Бержа — первая книга по теории графов на русском языке. Между тем в последние годы интерес к этой теории резко усилился как со стороны математиков, так и представителей самых различных прикладных дисциплин. Это объясняется тем, что методы теории графов успешно решают многочисленные задачи теории электрических цепей, теории транспортных сетей, теории информации, кибернетики и др.

В книге Бержа теория графов излагается последовательно, начиная с основ. Предполагается, что читатель обладает весьма скромными математическими познаниями, хотя и имеет некоторую математическую культуру. В текст включены многочисленные, зачастую забавные примеры. Книга может быть использована для первоначального изучения теории графов. Математики-профессионалы также найдут в ней много интересного.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих случаях жизни старая привычка толкает нас рисовать на бумаге точки, изображающие людей, населенные пункты, химические вещества и т. д., и соединять эти точки линиями или стрелками, означающими некоторые отношения. Такие схемы встречаются всюду под разными названиями: социограммы (в психологии), симплексы (в топологии), электрические цепи (в физике), диаграммы организации (в экономике), сети коммуникаций, генеалогические деревья и т. д. Д. Кёниг, без сомнения первый, предложил называть такие схемы „графами“ и систематически изучать их свойства.

Весьма примечательно, что в совершенно различных дисциплинах приходится использовать аналогичные теоремы; так, понятие „матрицы инцидентий“, введенное Кирхгофом для изучения электрических цепей, было привлечено А. Пуанкаре в топологию при создании его „analysis situs“; понятие „точки сочленения“, с давних пор известное в социологии, впоследствии появилось в электронике; все примеры такого рода перечислить невозможно. Чтобы можно было применять теорию графов в столь разнообразных областях, она должна быть в высшей степени абстрактной и формализованной.

В действительности такие основные понятия, как „цепь“, „путь“, „центр“, будучи определены абстрактно, остаются в то же время неразрывно связанными с графической реальностью и легко распознаются, когда схема начерчена. Вот почему теорию графов нельзя смешивать с алгебраической теорией отношений, имеющей другие задачи. В то же время современная комбинаторная топология, игнорирующая ориентацию ребер и почти не интересующаяся понятиями, не обобщаемыми на случай n измерений, до сих пор мало что внесла в теорию графов. Например, некоторые результаты, относящиеся к чередующимся цепям, не похожи ни на алгебраические, ни на топологические теоремы.

Излагая здесь теорию графов, мы ставим целью дать в руки читателю математическое орудие, приложимое как к наукам о поведении (теории информации, кибернетике, играм, транспортным сетям), так и к теории множеств, теории матриц и к другим чисто абстрактным дисциплинам.

Некоторые теоремы, приводимые нами, являются легкими; это такие теоремы, которые математик применяет „бессознательно“, воспроизводя их в частной форме в той или иной задаче. Придавая им возможно более общую форму, мы надеемся лишь добиться тем самым значительной экономии мышления.

Наряду с такими „мягкими“ теоремами имеются „жесткие“ теоремы, доказательства которых оказываются весьма тонкими и которые представляют собой результат многочисленных изысканий. Подобная разнородность могла быть лишь уменьшена путем расчленения некоторых теорем на большое число отдельных предложений с более короткими доказательствами.

Порядок, в котором мы рассматриваем различные задачи, относящиеся к графам, продиктован аналогичными соображениями, не сразу бросающимися в глаза читателю. Большая часть предложений необходима для доказательства дальнейших теорем.

Первые главы в основном посвящены понятиям, связанным с „ориентацией“, а последние — понятиям, с ней не связанным. Определения из алгебры и теории множеств напоминаются читателю по мере надобности, а для глав 14, 15 и 16 требуются некоторые сведения из теории матриц.

Наконец, доктор Ж. Риге любезно согласился в одном из добавлений к книге развить доклад, прочитанный им на Семинаре по Алгебре и Теории Чисел (Париж, 1955) и посвященный тонкой задаче подсчета числа графов, удовлетворяющих заданным условиям. Мы выражаем ему благодарность.

ГЛАВА 1

Основные определения¹⁾

Множества и многозначные отображения

В теории графов, как и во всех современных математических теориях, пользуются стенографическими символами, дающими значительную экономию мышления и делающими орудие исследования более гибким и эффективным. Хотя классические символы теории множеств, без сомнения, известны читателю, мы все же считаем целесообразным их напомнить.

Множество — это собрание объектов любой природы, называемых его *точками* (или его *элементами*). Рассуждения, которые нам предстоит проводить, не зависят от природы этих объектов: последние могут быть людьми, городами, числами, функциями и т. д. Удобно обозначать множества большими латинскими буквами A, B, X, \dots , а элементы множества — малыми латинскими буквами a, b, x, \dots . Множество A , элементами которого являются a, b, c, d , обозначают символом $A = \{a, b, c, d\}$.

Целесообразно рассматривать также *пустое множество*, совсем не содержащее элементов; его мы будем обозначать символом \emptyset . Иногда множество A определяется не перечислением его элементов, а указанием характеризующего их свойства; например, множество простых чисел можно записать так: $A = \{x/x \text{ простое}\}$.

Если свойство (1) влечет за собой свойство (2), то мы пишем $(1) \Rightarrow (2)$; когда эти два свойства равносильны, пишем $(1) \Leftrightarrow (2)$.

Пусть A и B — два данных множества; будем пользоваться следующими обозначениями:

$a \in A$: a есть элемент множества A .

$a \notin A$: a не является элементом множества A .

$A \subset B$: A содержится в B , или A есть *подмножество* множества B (все элементы множества A являются элементами множества B).

$A = B$: A совпадает с B ($A \subset B$ и $B \subset A$).

$A \neq B$: A не совпадает с B .

¹⁾ Эта глава — не более чем перечень самых основных терминов, которыми мы будем пользоваться; так сказать, правила игры. . . . Большую часть этих терминов можно понимать интуитивно, но во избежание недоразумений следует дать им аксиоматическое определение.

$A \subset \subset B$: A строго содержится в B ($A \subset B$ и $A \neq B$).

$A \cap B$: пересечение A и B (множество элементов, принадлежащих как A , так и B).

$A \cup B$: объединение A и B (множество элементов, принадлежащих или A , или B , или обоим этим множествам).

$A \setminus B$: множество элементов, принадлежащих A , но не принадлежащих B (см. рис. 1—1).

$A \times B$: декартово произведение A и B [множество пар (a, b) , образованных двумя объектами $a \in A$ и $b \in B$] (см. рис. 1—2).

Объединение, пересечение и декартово произведение можно определить не только для двух множеств A и B , но и для семейства множеств (A_1, A_2, \dots) .

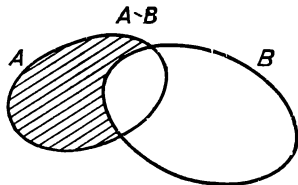
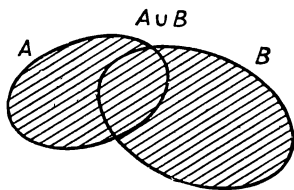
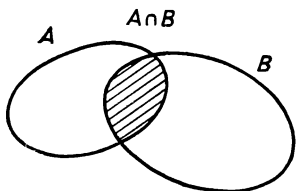


Рис. 1—1.

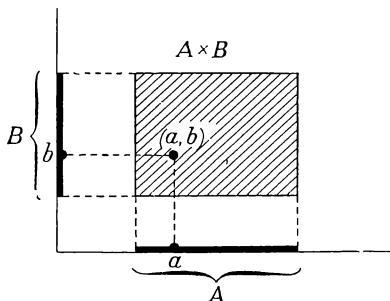


Рис. 1—2.

Объединение множеств A_i — это множество элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному A_i ; оно обозначается символом

$$\bigcup_i A_i.$$

Пересечение множеств A_i — это множество элементов, принадлежащих всем A_i сразу; оно обозначается символом

$$\bigcap_i A_i.$$

Декартово произведение множеств A_i есть множество последовательностей $(a_i | i = 1, 2, \dots)$, где $a_i \in A_i$ для каждого i ; оно обозначается символом

$$\prod_i A_i.$$

Последовательность из n элементов называется n -*строчкой*; ее нельзя смешивать с множеством n элементов (где порядок расположения элементов не играет роли).

Пример. *Вещественное трехмерное пространство* представляет собой множество 3-строчек, или просто троек (a_1, a_2, a_3) , где a_1, a_2, a_3 — вещественные числа; это декартово произведение трех множеств, каждое из которых совпадает с множеством \mathbf{R} вещественных чисел; по этой причине трехмерное вещественное пространство обозначают символом

$$\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}.$$

Вещественное n -мерное пространство обозначается символом \mathbf{R}^n .

Другим важным понятием, которым мы будем часто пользоваться, является понятие разбиения. *Разбиением* данного множества X называется такое семейство множеств $\{A_i / i \in I\}$, где I — некоторое множество индексов и $A_i \subset X$ при всех $i \in I$, что

- (1) $A_i \neq \emptyset$ ($i \in I$);
- (2) $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$;
- (3) $\bigcup_i A_i = X$.

При заданном разбиении $\{A_i\}$ мы пишем $x \equiv y$, когда x и y являются элементами одного и того же множества A_i . Тем самым определено отношение, которое обозначается символом \equiv и обладает следующими свойствами:

- (1) рефлексивность: $x \equiv x$;
- (2) симметрия: $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$;
- (3) транзитивность: $x \equiv y, y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$.

Всякое отношение \equiv со свойствами (1), (2), (3) называется *эквивалентностью*.

В свою очередь, эквивалентность \equiv определяет, очевидно, разбиение множества X на множества вида

$$A_i = \{x / x \in X, x \equiv x_0\}$$

(где x_0 — данная точка X).

Множество A_i иногда называют *классом эквивалентности* содержащим x_0 .

Пример 1. Пусть p — целое число; пишем

$$x \equiv y \pmod{p},$$

если x и y — два целых числа, отличающихся слагаемым, кратным p . Ясно, что это отношение — эквивалентность.

Пример 2. Если две прямые D и D' параллельны или совпадают, то пишем $D \parallel D'$; очевидно, \parallel есть отношение эквивалентности.

Пример 3. Если у двух людей x и y глаза одинакового цвета, то пишем $x \equiv y$; ясно, что \equiv есть отношение эквивалентности.

Пусть X и Y — два данных множества; закон σ , согласно которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие элемент $\sigma x \in Y$, называется *однозначным отображением X в Y , или функцией, определенной на X и принимающей значения в Y* ; например, числовая функция вещественной переменной представляет собой однозначное отображение \mathbf{R} в \mathbf{R} . *Многочисленное отображение Γ множества X в множество Y* есть закон, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие некоторое подмножество $\Gamma x \subset Y$; при этом не исключается возможность $\Gamma x = \emptyset$.

Говоря просто „отображение“, большинство авторов подразумевает однозначное отображение. Поскольку нам предстоит иметь дело главным образом с неоднозначными отображениями, мы не придерживаемся упомянутого соглашения и понимаем слово „отображение“ в широком смысле.

Пусть Γ — отображение данного множества X в Y . При $A \subset X$ назовем *образом* множества A множество

$$\Gamma A = \bigcup_{x \in A} \Gamma x.$$

Можно проверить, что если A_1, A_2, \dots, A_n — подмножества X , то

$$\Gamma \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \bigcup_{i=1}^n \Gamma A_i,$$

$$\Gamma \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \subset \bigcap_{i=1}^n \Gamma A_i.$$

Если Γ и Δ — отображения множества X в X , то *результат композиции* $\Gamma \Delta$ есть отображение, определяемое следующим образом:

$$(\Gamma \Delta) x = \Gamma (\Delta x).$$

Отображения $\Gamma^2, \Gamma^3, \dots$ определяются так:

$$\Gamma^2 x = \Gamma (\Gamma x),$$

$$\Gamma^3 x = \Gamma (\Gamma^2 x),$$

$$\dots \dots \dots$$

Транзитивным замыканием отображения Γ называется следующее отображение $\hat{\Gamma}$ множества X в X :

$$\hat{\Gamma} x = \{x\} \cup \Gamma x \cup \Gamma^2 x \cup \Gamma^3 x \cup \dots$$

Обращение Γ^{-1} , *обратное* отображению Γ , определяется так:

$$\Gamma^{-1} y = \{x/y \in \Gamma x\}.$$

Если B — подмножество множества X , то полагаем

$$\Gamma^{-1}B = \{x/\Gamma x \cap B \neq \emptyset\}.$$

Пример 1. Возьмем в качестве X множество людей и для $x \in X$ обозначим через Γx множество детей человека x . Тогда:

$\Gamma^2 x$: множество внуков x ;

$\hat{\Gamma} x$: множество, состоящее из x и всех его потомков;

$\Gamma^{-1} x$: родители x , и т. д.

Изображая людей точками и рисуя стрелку, идущую из x в y , в случае когда x является отцом или матерью y , мы получим *родословное*, или *генеалогическое дерево*.

Пример 2. Рассмотрим шахматную игру; каждое положение задается диаграммой (местонахождением фигур в данный момент) и ходом (указанием, кто из игроков должен в этот момент играть). Пусть X — множество всевозможных положений, Γx (где $x \in X$) — множество положений, которые по правилам игры можно получить непосредственно из x ; если положение x — матовое или патовое, то $\Gamma x = \emptyset$.

Имеем:

$\Gamma^3 x$ — множество положений, которые можно получить из x тремя ходами;

$\hat{\Gamma} x$ — множество положений, которые вообще можно рано или поздно получить, отправляясь от x ;

$\Gamma^{-1} A$ (где $A \subset X$) — множество тех положений, из которых возможно одним ходом получить какое-либо положение, входящее в A .

Такая система обозначений позволяет выразить формулой множество выигрышных положений и вывести отсюда некоторые свойства ¹⁾.

В случае шахмат правила игры полностью определяются множеством X и отображением Γ ; однако здесь мы имеем дело с таким большим числом положений, что изобразить все их точками, а отображение Γ — стрелками, соединяющими некоторые точки, практически невозможно. Тем не менее некоторые свойства, общие для правил шахматной игры и для отношений родства в группе людей, можно выявить, обращаясь к аксиоматическому методу; этим мы займемся в следующих параграфах.

Граф. Пути и контуры

Говорят, что дан *граф*, если даны:

1° непустое множество X ;

2° отображение Γ множества X в X .

¹⁾ См. Берж [2].

Собственно говоря, *граф*, обозначаемый символом $G = (X, \Gamma)$, есть пара, которая состоит из множества X и отображения Γ . Отношения отцовства и материнства в множестве людей определяют граф; то же имеет место для правил шахматной игры, для соединений между собой электрических приборов, для отношения превосходства одних участников турнира над другими и т. д.

Всякий раз, когда это возможно, будем элементы множества X изображать точками плоскости, а пары точек x и y , для которых $y \in \Gamma x$, соединять непрерывной линией со стрелкой, направленной от x к y . Это дает основание называть каждый элемент множества X *точкой*, или *вершиной* графа, а пару элементов (x, y) , в которой $y \in \Gamma x$, — *дугой* графа. Далее множество дуг графа будет обозначаться через U , а сами дуги — буквами u, v или w (в случае надобности — с индексами).

Пример. У графа G , изображенного на рис. 1—3, множество X образовано вершинами a, b, c, d, e, x , множество U — дугами (a, b) , (b, a) , (b, x) , (x, x) , (x, c) , (c, x) , (x, d) , (e, e) . Отображение Γ определить нетрудно: например,

$$\begin{aligned}\Gamma x &= \{x, c, d\}, \\ \Gamma d &= \emptyset \quad \text{и т. д.}\end{aligned}$$

Ясно, что множество дуг вполне определяет отображение графа, и, наоборот, отображение Γ определяет множество U ; поэтому граф можно с одинаковым правом записывать как в виде $G = (X, \Gamma)$, так и в виде $G = (X, U)$.

Подграфом графа (X, Γ) называется граф вида (A, Γ_A) , где $A \subset X$, а отображение Γ_A определено следующим образом:

$$\Gamma_A x = \Gamma x \cap A.$$

Частичным графом для (X, Γ) называется граф вида (X, Δ) , где $\Delta x \subset \Gamma x$ при всех $x \in X$.

Частичным подграфом графа (X, Γ) называется граф вида (A, Δ_A) , где $A \subset X$ и $\Delta_A x \subset \Gamma x \cap A$.

Пример. Рассмотрим граф (X, U) , представляющий карту дорог Франции: X — множество городов Франции, и $(x, y) \in U$, если имеется дорога, главная или второстепенная, ведущая из города x в город y ; карта главных дорог определяет частичный граф, а карта всех дорог Нормандии — подграф.

Говорят, что a и b являются *граничными* вершинами дуги $u = (a, b)$, причем a — *начало*, а b — *конец* дуги. Две дуги u и v называются *смежными*, если

1° они различны;

2° они имеют общую граничную точку (независимо от того, является ли эта точка началом или концом дуги u , началом или концом дуги v).

Далее, говорят, что две вершины x и y *смежны*, если

1° они различны;

2° существует дуга, идущая от одной из них к другой.

Наконец, говорят, что дуга u *исходит* из вершины x , если x является началом, но не является концом u , и что u *заходит* в x , если x является концом, но не является началом u ; в обоих случаях дуга u называется *инцидентной* вершине x . Это понятие легко обобщается: если A — данное множество вершин, то говорят, что дуга u *исходит* из A , если

$$u = (a, x), \quad a \in A, \quad x \notin A;$$

множество дуг, исходящих из A обозначается символом U_A^+ . Аналогично определяется множество U_A^- дуг, *заходящих* в множество вершин A .

Множество дуг, инцидентных A , обозначается символом $U_A = U_A^+ \cup U_A^-$.

Предоставляем читателю проверить, что в графе, изображенном на рис. 1—3, для $A = \{a, x\}$ имеем

$$U_A^+ = \{(a, b), (x, c), (x, d)\}, \quad U_A^- = \{(b, a), (b, x), (c, x)\}.$$

Путь в графе $G = (X, U)$ называется такая последовательность (u_1, u_2, \dots) дуг, что конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Путь является *простым*, когда в нем никакая дуга не встречается дважды, и *составным* — в противном случае.

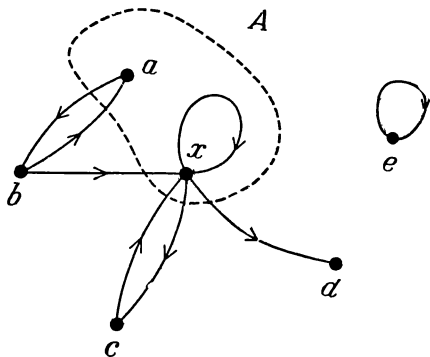
Путь μ , последовательные вершины которого суть $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$, можно обозначить символом $\mu = [x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}]$; путь, идущий от x_2 к x_k по тем же дугам, что и μ , будем обозначать

$$\mu[x_2, x_k] = [x_2, x_3, \dots, x_k].$$

Путь, в котором никакая вершина не встречается дважды, называется *элементарным*; путь может быть конечным или бесконечным.

Контур — это конечный путь $\mu = [x_1, x_2, \dots, x_k]$, у которого начальная вершина x_1 совпадает с конечной x_k ; при этом контур называется *элементарным*, если все его вершины различны (за исключением начальной и конечной, которые совпадают).

Длина пути $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ есть число $l(\mu) = k$ дуг последовательности; в случае бесконечного пути μ полагаем $l(\mu) = \infty$. Наконец, контур длины 1, образованный дугой вида (x, x) , называется *петлей*.



Р и с. 1—3.

Пример. *Старшинство в организации.*

Пусть X — множество лиц некоторой организации, например военной, и пусть Γx — множество лиц, непосредственно подчиненных лицу x . Связь любого начальника с любым подчиненным изобразится в виде пути графа (X, Γ) ; важно, чтобы граф не имел контуров, ибо их наличие может привести к противоречивым приказам.

С помощью понятий *дуги, пути, контура* можно охарактеризовать некоторые важные категории графов. Прежде всего, граф (X, U) называется *симметрическим*, если

$$(x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \in U.$$

В симметрическом графе две смежные вершины x и y всегда соединены двумя противоположно ориентированными дугами; для упрощения изображения условимся в этом случае соединять обе точки одной непрерывной линией без стрелок.

Граф (X, U) называется *антисимметрическим*, если

$$(x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \notin U$$

(каждая пара смежных вершин соединена только в одном направлении; петли отсутствуют).

Граф (X, U) называется *полным*, если

$$(x, y) \notin U \Rightarrow (y, x) \in U$$

(любые две вершины соединены хотя бы в одном направлении).

Наконец, говорят, что граф *сильно связан*, когда для любых двух вершин x и y ($x \neq y$) существует путь, идущий из x в y .

Пример. *Схема коммуникаций.* Пусть X — некоторое множество людей и пусть $(x, y) \in U$, когда лицо x имеет возможность непосредственно передавать сообщения лицу y . Обычно этот граф — симметрический: например, если связь осуществляется с помощью телеграфа, телефона, там-тама и т. д.; но граф может и не быть симметрическим, как в случае ракет или почтовых голубей.

Кроме того, в правильно спроектированной сети коммуникаций каждый человек должен иметь возможность передать сообщение любому другому члену организации или непосредственно, или через посредников; иными словами, важно, чтобы граф был сильно связан.

Цепи и циклы

Ребром графа $G = (X, U)$ называется множество из двух элементов x и y , для которых $(x, y) \in U$ или $(y, x) \in U$; это понятие нельзя смешивать с понятием *дуги*, в котором участвует ориентация. Так, например, граф, изображенный на рис. 1—3, имеет 8 дуг, но только 6 ребер.

Ребро обозначается жирной латинской буквой: **u** или **v**, а множество ребер — буквой **U**. Ребро, для которого вершины x и y — граничные, обозначается символом $\mathbf{u} = [x, y]$.

Цепь — это последовательность ребер $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots)$, в которой у каждого ребра \mathbf{u}_k одна из граничных вершин является также граничной вершиной для \mathbf{u}_{k-1} , а другая — граничной вершиной для \mathbf{u}_{k+1} . Цепь называется *простой*, если все ее ребра различны, и *составной* — в противном случае.

Цикл — это конечная цепь, начинающаяся в некоторой вершине x и оканчивающаяся в той же вершине x ; цикл называется *простым*, если все его ребра различны, и *составным* в противном случае; наконец, цикл, при обходе которого ни одна вершина не встречается дважды, называется *элементарным*.

Граф *связен*, если любые две его различные вершины можно соединить цепью. Сильно связный граф связан, но обратное утверждение неверно.

Обозначим через C_a множество, состоящее из данной вершины a и всех тех вершин графа, которые могут быть соединены с ней цепью; *компонента связности* (или просто *компонента*) — это подграф, порожденный множеством типа C_a .

Приведем две очень простые теоремы.

Теорема 1. *Различные компоненты графа (X, Γ) образуют разбиение множества X ; то есть:*

- (1) $C_a \neq \emptyset$;
- (2) $C_a \neq C_b \Rightarrow C_a \cap C_b = \emptyset$;
- (3) $\bigcup C_a = X$.

Так как $a \in C_a$, то (1) имеет место.

Для доказательства (2) предположим, что $C_a \cap C_b \neq \emptyset$, и покажем, что тогда $C_a = C_b$.

Пусть $x \in C_a \cap C_b$; вершина x может быть соединена цепями как с a , так и с b ; поэтому a можно соединить с b , т. е. $b \in C_a$. Значит,

$$C_b \subset C_a.$$

Точно так же имеем $C_a \subset C_b$ (из соображений симметрии), следовательно, $C_a = C_b$.

(3) справедливо потому, что

$$X \supset \bigcup_{a \in X} C_a \supset \bigcup_{a \in X} \{a\} = X,$$

откуда

$$\bigcup C_a = X.$$

Теорема 2. *Граф связан в том и только в том случае, если он состоит из единственной компоненты.*

Если граф имеет две различные компоненты C_a и C_b , то он несвязен, ибо вершины a и b нельзя соединить цепью.

Если граф несвязен, то найдутся две вершины a и b , которые невозможно соединить цепью, и, значит, C_a и C_b будут различными компонентами.

Замечание. Граф можно рассматривать либо с учетом, либо без учета ориентации его дуг; в первом случае мы имеем дело с понятиями дуги, пути, контура, сильной связности и т. д., во втором — с понятиями ребра, цепи, цикла, связности и т. д. В дальнейшем, когда для некоторого понятия, определяемого в терминах дуг графа, имеется параллельное понятие, определяемое в терминах ребер, мы часто будем образовывать второе из первого посредством добавления суффикса „оид“ (например, „центр“ — „центроид“ и т. д.).

ГЛАВА 2

Предварительное изучение квазиупорядоченности

Квазипорядок, определяемый графом

В алгебре говорят, что отношение \leq на множестве X есть *квазипорядок*, если имеют место

- (1) *рефлексивность*: $x \leq x$ (для всех $x \in X$);
- (2) *транзитивность*: $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ($x, y, z \in X$).

Квазипорядки встречаются всюду: „целое число x делится на y “, „ x — вещественное число, большее или равное y “, „ x — ситуация, которую я предпочитаю или считаю равносильной ситуации y “, суть отношения квазипорядка.

Введем на графе $G = (X, \Gamma)$ отношение \leq следующим образом: для двух вершин x и y пишем $x \leq y$, если $x = y$ или существует путь из x в y (иначе говоря, если $y \in \hat{\Gamma}x$).

Это отношение \leq , удовлетворяющее, очевидно, условиям (1) и (2), называется *квазипорядком, определяемым графом G* .

Если $x \leq y$, то говорят, что вершина x *предшествует* вершине y .

Отношение $y \leq x$ можно записать также в виде $x \geq y$ и сказать, что вершина x *следует* за вершиной y .

Если $x \leq y$ и $y \leq x$, то пишем $x \equiv y$ и говорим, что вершина x *эквивалентна* вершине y ; в этом случае x и y совпадают или лежат на одном и том же контуре. Читатель непосредственно проверит, что \equiv является отношением эквивалентности, т. е. что имеют место

- (1) *рефлексивность*: $x \equiv x$;
- (2) *транзитивность*: $x \equiv y, y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$;
- (3) *симметрия*: $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$.

Если $x \leq y$, но не $x \equiv y$, то пишем $x < y$ и говорим, что вершина x *строго предшествует* вершине y ; пишут также $y > x$ и говорят, что вершина y *строго следует* за x .

Вершина z , следующая за всеми вершинами некоторого множества $B \subset X$, называется *мажорантой* множества B ; это можно записать так:

$$z \geq b \quad (b \in B).$$

Если в B имеется элемент, который служит мажорантой B , то этот элемент называется *наибольшим элементом* множества B . Если b и b' — два наибольших элемента множества B , то $b \leq b'$ и $b' \leq b$, следовательно, $b \equiv b'$, т. е. все наибольшие элементы одного и того же множества вершин графа эквивалентны.

Аналогично *минорантой* B называется такая вершина z , для которой

$$z \leq b \quad (b \in B).$$

Миноранта B , принадлежащая B , называется *наименьшим элементом* множества B .

Эти понятия, хорошо известные из алгебры, прежде всего позволяют легко характеризовать различные категории графов.

Пример 1. Граф без контуров. Если (X, Γ) не содержит контуров, то определяемое им отношение \leq обладает свойством

$$x \leq y, \quad y \leq x \Rightarrow x = y.$$

В этом случае говорят, что \leq есть *отношение порядка*.

Наоборот, если отношение \leq , определяемое графом, есть порядок, то граф не имеет контуров.

В качестве примера рассмотрим множество X и некоторое семейство \mathcal{F} его подмножеств; назовем *диаграммой Хассе* семейства \mathcal{F} граф G , вершинами которого служат различные множества семейства \mathcal{F} , причем из $F \in \mathcal{F}$ в $F' \in \mathcal{F}$ идет дуга, если

$$1^\circ F \subset \subset F';$$

2° не существует такого множества $F'' \in \mathcal{F}$, что $F \subset \subset F'' \subset \subset F'$. Квазипорядок, определяемый графом G , есть не что иное, как отношение \subset ; это отношение — порядок: G не содержит контуров. Было бы интересно выяснить при $X = \{1, 2, \dots, n\}$, сколько семейств \mathcal{F} допускает данную диаграмму Хассе; эта задача, называемая иногда *проблемой Рейни* (Rainey), не решена еще для $n > 5$.

Пример 2. Транзитивный граф. Граф (X, U) называется *транзитивным*, если

$$x \leq y \Rightarrow (x, y) \in U.$$

Так, если вершины графа изображают людей, а дуги — иерархическое превосходство (например, старшинство), то граф — транзитивный.

Пример 3. Тотальный граф. Отношение квазипорядка \leq называется *тотальным*, когда для любой пары (x, y) имеет место или $x \leq y$, или $y \leq x$; граф является тотальным, если связанный с ним квазипорядок — тотальный. Справедливо следующее утверждение: *всякий сильно связанный граф является тотальным*.

ПРИМЕР 4. Структурный граф и прадеревья. Рассмотрим отношение порядка \leq , определяемое графом (X, Γ) без контуров; если множество мажорант некоторого множества $B \subset X$ имеет наименьший элемент s , то s называется *верхней гранью* множества B ; отношение порядка \leq называется *структурным (сверху)*, если каждое множество B допускает верхнюю грань; в этом случае говорят, что граф (X, Γ) является *верхней структурой*.

Аналогично определяются понятия *нижней грани* и *нижней структуры*.

Частным случаем структурного графа является так называемое *прадерево*¹⁾ с *корнем* a , например изображенное на рис. 2—1. Прадеревья будут изучаться позднее (гл. 16).

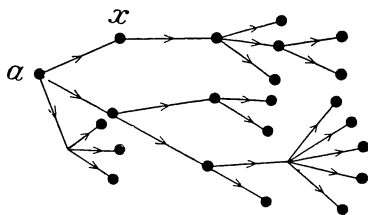


Рис. 2—1.

Индуктивный граф и базы

Множество $B \subset X$ называется *базой* графа (X, Γ) , если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

- (1) $b_1 \in B, b_2 \in B, b_1 \neq b_2 \Rightarrow$ ни $b_1 \leq b_2$, ни $b_2 \leq b_1$.
- (2) $x \notin B \Rightarrow$ существует такая вершина $b \in B$, что $b \geq x$.

ПРИМЕР. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 2—2. Множество $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ — его база; подграф же, порожденный множеством $X \setminus B$, не имеет базы.

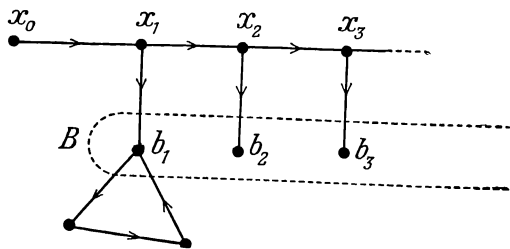


Рис. 2—2.

Понятие базы графа участвует в многочисленных конкретных задачах, относящихся к сетям коммуникаций, и мы увидим позднее (гл. 5 и 6), что оно применяется и в теории игр. Наконец, с его помощью можно получать чисто теоретические результаты

¹ Мы переводим так термин *arborescence*. — Прим. перев.

топологии или линейного анализа. Здесь мы собираемся только найти возможно более общие условия существования базы графа как в случае, когда он имеет конечное, так и в случае, когда он имеет бесконечное множество вершин.

Граф называется *индуктивным*, если каждый его путь $\mu = [x_1, x_2, \dots]$ допускает мажоранту, т. е. если для каждого μ существует такая вершина z , что

$$z \geq x_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Пример 1. Всякий конечный граф является индуктивным, ибо если путь μ конечен, то мажорантой служит его последняя вершина, а если μ бесконечен, то по крайней мере одна из вершин этого пути повторяется бесконечно много раз и поэтому является его мажорантой.

Пример 2. Напротив, граф, изображенный на рис. 2—2, не является индуктивным.

В некоторых вопросах (глава 5) понятие индуктивного графа оказывается недостаточным; говорят, что граф *вполне индуктивен*, если для каждого бесконечного пути $\mu = [x_0, x_1, \dots]$ отношение квазиупорядка \leq^μ в подграфе, порожденном множеством вершин $\{x_0, x_1, \dots\}$, можно при достаточно больших номерах i и j представить в виде $x_i \equiv^\mu x_j$.

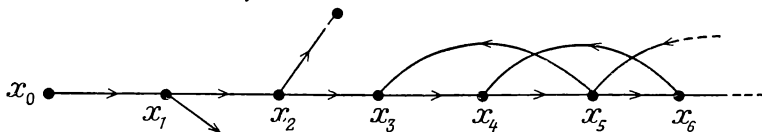


Рис. 2—3.

Пример. Для графа, изображенного на рис. 2—3, имеем:

$$x_i \equiv^\mu x_j \quad (i \geq 3, j \geq 3),$$

значит, он вполне индуктивен.

Очевидно, *вполне индуктивный граф индуктивен*; кроме того, имеет место основное свойство: *всякий подграф вполне индуктивного графа вполне индуктивен*. (Для индуктивных графов аналогичного предложения нет.)

Лемма Цорна. В индуктивном графе (X, Γ) для любой вершины x существует вершина z , не имеющая строго последующих¹⁾ и такая, что $z \geq x$.

¹⁾ Вершину, не имеющую строго последующих (строго предшествующих), называют еще *максимальным* (соответственно *минимальным*) элементом; его нельзя путать с *наибольшим* (соответственно *наименьшим*) элементом (см. [2], гл. 1). — *Прим. перев.*

Это хорошо известный в теории множеств результат; для доказательства его мы отсылаем читателя к [2] (гл. I) или к Е. Т. Ф. М. (гл. 3).

Теорема 1. *Всякий индуктивный граф обладает базой¹⁾.*

Пусть Z — множество тех вершин, у которых нет строго последующих; рассмотрим в Z эквивалентность \equiv , определяемую отношением квазипорядка \leq ($z_1 \equiv z_2$, если z_1 и z_2 принадлежат одному и тому же контуру). В каждом классе эквивалентности C_i выберем некоторого представителя b_i и покажем, что множество $B = \{b_i / i \in I\}$ ²⁾ является базой графа.

1° При $i \neq j$ не может быть $b_i \leq b_j$, так как в этом случае было бы $b_i \equiv b_j$ (вершина b_i не имеет строго последующих), т. е. b_i и b_j принадлежали бы к одному классу эквивалентности (что невозможно, поскольку классы эквивалентности попарно не пересекаются).

2° Для $x \notin B$ по лемме Цорна существует точка z_0 , не имеющая строго последующих и такая, что $z_0 \geq x$; пусть b_i — представитель класса эквивалентности $C_i = \{z / z \in Z, z \equiv z_0\}$; тогда

$$x \leq b_i, \quad b_i \in B.$$

Теорема 2. *Граф (X, Γ) , обладающий конечной базой B , индуктивен.*

Пусть $\mu = [x_1, x_2, \dots]$ — бесконечный путь графа (если такой путь существует), и пусть b_1, b_2, \dots — те вершины базы B , для которых $b_n \geq x_n$ при всех n ; так как множество B конечно, то по крайней мере одна вершина b_k встретится в последовательности (b_n) бесконечно много раз; тогда

$$b_k \geq x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Ч. И. Т. Д.

Теорема 3. *В множестве Z вершин, не имеющих строго последующих, рассмотрим классы эквивалентности $\{z / z \in Z, z \equiv z_0\}$; база B , если она существует, образована элементами, выбранными по одному из каждого класса эквивалентности.*

Если B — база, то вершина $b \in B$ не может иметь строго последующих; действительно, из $x > b$ вытекало бы существование такого $b' \in B$, что $b' \geq x$ и, значит, $b' \geq b$, $b' \neq b$, а это невозможно, так как B — база.

Хотя бы одна вершина из базы B принадлежит классу $\{z / z \in Z, z \equiv z_0\}$, так как в противном случае не существовало бы пути, ведущего из z_0 в B .

¹⁾ Можно, между прочим, показать, что это предложение равносильно лемме Цорна; поэтому его прямое доказательство было бы длинным и трудным.

²⁾ I означает множество $\{i\}$ индексов всех классов C_i . — *Прим. перев.*

Два различных элемента b и $b' \in B$ не могут принадлежать одному и тому же классу эквивалентности, ибо иначе было бы $b \equiv b'$ и существовал бы путь, ведущий из одной точки B в другую точку B .

Следствие. Если граф обладает базой, то все его базы имеют одну и ту же мощность; в частности, все базы конечного графа (который, будучи индуктивным, всегда обладает базой) имеют одно и то же число элементов.

Это вытекает из того, что классы эквивалентности, о которых идет речь в теореме 3, образуют разбиение множества Z .

ГЛАВА 3

Порядковая функция и функция Гранди для бесконечного графа

Общие соображения относительно бесконечных графов

Если A — конечное множество, то через $|A|$ будем обозначать число его элементов. Если A содержит бесконечно много элементов, то полагаем $|A| = \infty$.

Граф (X, Γ) называется *конечным*, если $|X| < \infty$. Граф Γ -*конечен*, если $|\Gamma x| < \infty$ для всех x , и Γ^{-1} -*конечен*, если $|\Gamma^{-1} x| < \infty$ для всех x ; граф, обладающий этими двумя свойствами одновременно, называется *локально конечным*. Очевидно, всякий конечный граф локально конечен.

Наконец, граф называется Γ -*ограниченным*, если существует такое целое число m , что $|\Gamma x| \leq m$ при всех x .

Пример. Граф, изображенный на рис. 3—1, Γ -конечен, но не является Γ -ограниченным; он не является также Γ^{-1} -конечным.

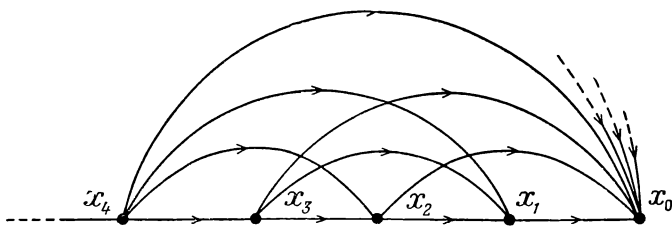


Рис. 3—1.

Если в графе не существует путей бесконечной длины, начинающихся в данной вершине x_0 , то говорят, что этот граф *прогрессивно конечен в x_0* ; граф, прогрессивно конечный в каждой своей точке, называется *прогрессивно конечным*.

Граф называется *прогрессивно ограниченным в вершине x_0* , если существует такое целое число m , что длина каждого пути, начинающегося в x_0 , не превосходит m ; граф, прогрессивно ограниченный в каждой своей точке, *прогрессивно ограничен*. Прогрессивно ограниченный граф является в то же время прогрессивно конечным, но обратное неверно.

Наконец, говорят, что граф (X, Γ) *регрессивно конечен*, соответственно *регрессивно ограничен*, если граф (X, Γ^{-1}) прогрессивно конечен, соответственно прогрессивно ограничен.

Пример. Граф, изображенный на рис. 3—1, прогрессивно конечен, но не является регрессивно конечным; он прогрессивно ограничен, хотя и содержит сколь угодно длинные пути.

В этом параграфе мы намереваемся установить весьма общие теоремы, которые впоследствии позволят распространять утверждения о конечных графах на некоторые бесконечные графы. Важность этой задачи очевидна: если в психологии или исследовании операций имеют дело с конечными графами, то в геометрии и теории множеств, напротив, приходится сталкиваться главным образом с бесконечными графами.

Теорема 1. *Для конечных графов свойства „прогрессивно ограниченный“, „прогрессивно конечный“ и „без контуров“ равносильны.*

(Очевидно.)

Теорема 2. *Если граф (X, Γ) прогрессивно конечен и Γ -конечен, то*

$$|\hat{\Gamma}x| < \infty \quad (x \in X).$$

В самом деле, допустим, что в некоторой вершине x_0 имеет место $|\hat{\Gamma}x_0| = \infty$; так как $|\Gamma x_0| < \infty$, то в Γx_0 найдется хотя бы одна такая вершина x_1 , что $|\hat{\Gamma}x_1| = \infty$; точно так же в Γx_1 найдется вершина x_2 , для которой $|\hat{\Gamma}x_2| = \infty$; и т. д. Путь $[x_0, x_1, \dots, x_n, \dots]$ имеет бесконечную длину, что противоречит условию теоремы.

Следствие 1. *Граф (X, Γ) , прогрессивно конечный в некоторой вершине x_0 и Γ -конечный, является также прогрессивно ограниченным в x_0 .*

В самом деле, подграф, порождаемый множеством $\hat{\Gamma}x_0$, прогрессивно конечен, а значит, в силу теоремы 2, конечен; так как, кроме того, он не содержит контуров, то он прогрессивно ограничен (теорема 1). Следовательно, граф (X, Γ) прогрессивно ограничен в x_0 .

Следствие 2 (Кёниг). *Пусть (A_1, A_2, \dots) — последовательность конечных непустых попарно непересекающихся множеств, и пусть \prec — отношение, определенное для элементов двух последовательных множеств A_n ; если для любого элемента $x_n \in A_n$ существует такой элемент $x_{n-1} \in A_{n-1}$, что $x_{n-1} \prec x_n$, то суще-*

ствуется такая последовательность (a_1, a_2, \dots) , где $a_n \in A_n$ при всех n , что

$$a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec \dots \prec a_n \prec \dots$$

Пусть X — объединение всех множеств A_n , к которому добавлена произвольная точка x_0 ; определим на X отображение Γ следующим образом:

$$\Gamma x_0 = A_1,$$

$$\Gamma x_n = \{x/x \in A_{n+1}, x_n \prec x\} \quad (x_n \in A_n).$$

Граф (X, Γ) Γ -конечен; он не является прогрессивно ограниченным, ибо для любого m легко построить путь длины m , беря некоторую точку a_m в A_m , затем a_{m-1} в A_{m-1} с условием $a_{m-1} \prec a_m$ и т. д. Ввиду следствия 1 граф не является прогрессивно конечным в x_0 , поэтому существует бесконечный путь $[x_0, a_1, a_2, \dots]$; последовательность (a_1, a_2, \dots) удовлетворяет требуемому условию.

Теорема 3. *Множества вершин и цепей локально конечного связного графа можно перенумеровать.*

Выберем произвольно вершину x_0 ; пронумеруем цепи длины 1, выходящие из x_0 , и их крайние вершины, затем станем нумеровать цепи длины 2 и их крайние вершины (те, которые еще не получили номеров) и т. д. Поскольку до любой вершины можно добраться по цепи, выходящей из x_0 , все множество X и множество цепей, идущих из x_0 , окажутся пронумерованными¹⁾.

Теорема Радó [5]. *Пусть (X, Γ) — локально конечный граф, E_0 — некоторое конечное множество целых чисел; каждому $I \in E_0$ поставим в соответствие некоторое $E(I) \subset E_0$. Если для каждого конечного подграфа (A, Γ_A) существует целозначная функция $\varphi_A(x)$, удовлетворяющая условию*

$$\varphi_A(x) \in E[\varphi_A(\Gamma_A x)] \quad (x \in A),$$

то на X существует целозначная функция $\varphi(x)$, такая, что

$$\varphi(x) \in E[\varphi(\Gamma x)] \quad (x \in X).$$

По определению, $\varphi(\Gamma x)$ означает множество $I = \{\varphi(y)/y \in \Gamma x\}$ ²⁾.

¹⁾ А так как множество всех цепей, выходящих из x_0 , и множество X всех x_0 оба счетны, то и множество всех вообще цепей можно перенумеровать. — *Прим. перев.*

²⁾ В оригинале E_0 отсутствует, а I и $E(I)$ просто предполагаются конечными; но в такой формулировке теорема неверна. — *Прим. перев.*

Порядковая функция

Хорошо известным обобщением понятия *целого числа* служит понятие *порядкового числа*; напомним его.

В строчке $(x_1, x_2, \dots, x_{12})$ из 12 объектов место объекта x_6 указывается символом 6.

Допустим теперь, что собрание объектов x_1, x_2, \dots бесконечно и что эти объекты расположены в некотором порядке, скажем

$$(x_4, x_5, x_6, \dots; x_1, x_2, x_3).$$

Если места объектов x_4, x_5, x_6, \dots можно определить обычными целыми числами, то для определения мест объектов x_1, x_2, x_3 потребуются ввести новые символы: $\omega + 1$ для x_1 , $\omega + 2$ для x_2 , $\omega + 3$ для x_3 . Символы $1, 2, \dots, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3$ называются *порядковыми числами первого рода* (или *непредельными порядковыми числами*), а символ ω , не определяющий никакого места, — *порядковым числом второго рода* (или *предельным порядковым числом*).

Эти определения можно продолжать и дальше; например, при порядке

$$(x_3, x_5, x_7, x_9, \dots; x_2, x_4, x_6, x_8, \dots; x_1)$$

место объекта x_8 будет $\omega + 4$, место x_1 будет $\omega 2 + 1$.

Для двух порядковых чисел α и β считают, что $\alpha < \beta$, если объект, место которого указывается символом α , предшествует объекту, место которого указывается символом β .

Разумеется, порядковые числа можно определить строго при помощи алгебраических понятий¹⁾.

В теории графов понятие порядкового числа имеет большое значение, так как оно позволяет переносить предложения о конечных графах на некоторые бесконечные графы.

¹⁾ Пара, образованная множеством X и отношением порядка \leq , есть *вполне упорядоченное множество*, если любое подмножество множества X имеет наименьший элемент. Два вполне упорядоченных множества (X, \leq) и (Y, \leq) называются *эквивалентными*, если между X и Y можно установить взаимно однозначное соответствие σ , при котором

$$x \leq x' \iff \sigma x \leq \sigma x'.$$

Порядковое число будет тогда классом эквивалентности, содержащим данное вполне упорядоченное множество. Запомним лишь результат: сами порядковые числа вполне упорядочены отношением \leq . (См., например, [1] (гл. I).) (См. также П. С. Александров, *Введение в общую теорию множеств и функций*, М.—Л., 1948, или Ф. Хаусдорф, *Теория множеств*, М.—Л., 1937. — *Прим. ред.*.)

Теорема 4. *Порядковая функция определена на всем множестве X в том и только в том случае, если граф (X, Γ) прогрессивно конечен.*

1° Пусть $o(x)$ существует для всех $x \in X$; покажем, что граф прогрессивно конечен. С этой целью мы допустим, что существует бесконечный путь $[a_1, a_2, \dots]$, и убедимся в том, что это приводит к противоречию.

Положим $A = \{a_1, a_2, \dots\}$; имеем $A \cap X(0) = \emptyset$.

Если $A \cap X(\beta) = \emptyset$ для всех порядковых чисел $\beta < \alpha$, то также $A \cap X(\alpha) = \emptyset$. Тогда, в силу принципа индукции,

$$A \cap X = \emptyset.$$

Отсюда $A = \emptyset$, что невозможно.

2° Наоборот, предположим, что существует вершина x , не имеющая порядка; пусть B — множество всех таких вершин. Имеем $B \neq \emptyset$.

Если $x_1 \in B$, то $\Gamma x_1 \neq \emptyset$ [ибо $x_1 \notin X(0)$], поэтому в Γx_1 найдется вершина $x_2 \in B$; точно так же в Γx_2 найдется вершина $x_3 \in B$, и т. д.

Путь $[x_1, x_2, x_3, \dots]$ обладает бесконечной длиной, и граф не может быть прогрессивно конечным.

Функции Гранди

Рассмотрим конечный граф (X, Γ) и функцию g , относящую каждой вершине x целое число $g(x) \geq 0$. Будем говорить, что $g(x)$ есть *функция Гранди* для данного графа, если в каждой вершине x

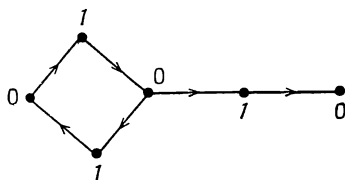
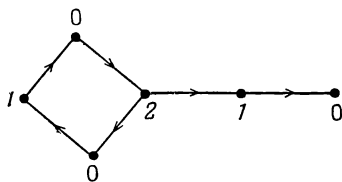


Рис. 3—3.

значение $g(x)$ представляет собой наименьшее из тех целых неотрицательных чисел, которые не принадлежат множеству

$$g(\Gamma x) = \{g(y) / y \in \Gamma x\}.$$

Пользуясь трансфинитными порядковыми числами, можно определить функцию Гранди в случае бесконечного графа: $g(x)$ есть наименьшее порядковое число, не принадлежащее множеству

$$\{g(y) / y \in \Gamma x\}.$$

Из определения следует, что если $\Gamma x = \emptyset$, то необходимо $g(x) = 0$.

Граф может не допускать функции Гранди (например, если у него есть петля) или же допускать более одной такой функции.

Пример 1. Граф, изображенный на рис. 3—3, допускает две функции Гранди, значения которых указаны около соответствующих

вершин; можно убедиться, что если $\Gamma x = \{y_1, y_2, \dots\}$, то $g(x)$ — наименьшее целое число, отличное от $g(y_1), g(y_2), \dots$.

Пример 2. Граф, изображенный на рис. 3—2, допускает единственную функцию Гранди $g(x)$; эта функция при $x \neq y$ равна $o(x)$, а в вершине y принимает трансфинитное значение ω .

Теорема 5. *Прогрессивно конечный граф допускает одну и только одну функцию Гранди $g(x)$; при этом*

$$g(x) \leq o(x).$$

Доказательство получается непосредственно, если провести индукцию по множествам

$$\begin{aligned} X(0) &= \{x/\Gamma x = \emptyset\}, \\ X(1) &= \{x/\Gamma x \subset X(0)\}, \\ X(2) &= \{x/\Gamma x \subset X(1)\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Теорема 6. *Если $|\Gamma x| < \infty$, то $g(x) \leq |\Gamma x|$.*

Если $g(x) = n$, то функция g принимает в Γx все значения $0, 1, 2, \dots, n-1$, поэтому $|\Gamma x| \geq n = g(x)$.

Теоремы 5 и 6 показывают, что функция $g(x)$ не слишком охотно принимает большие значения; в частности, для Γ -конечного или для прогрессивно ограниченного графа значения $g(x)$ остаются конечными числами.

Операции над графами

Рассмотрим n графов $G_1 = (X_1, \Gamma_1), G_2 = (X_2, \Gamma_2), \dots, G_n = (X_n, \Gamma_n)$, а также граф $G = (X, \Gamma)$, определяемый следующим образом:

(1) $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)/x_1 \in X_1 \text{ и т. д.}\}$ (декартово произведение множеств X_i),

(2) $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Gamma_1 x_1 \times \Gamma_2 x_2 \times \dots \times \Gamma_n x_n$.

Этот граф обозначается символом $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ и называется *произведением* графов G_i .

Подобным же образом *сумма* графов G_i , по определению, есть граф (X, Γ) , для которого

(1) $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$,

(2) $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = [\Gamma_1 x_1 \times \{x_2\} \times \dots] \cup$
 $\cup [\{x_1\} \times \Gamma_2 x_2 \times \dots] \cup \dots \cup [\{x_1\} \times \{x_2\} \times \dots \times \Gamma_n x_n].$

Этот граф обозначается символом $G = G_1 + G_2 + \dots + G_n$.

Операции \times и $+$, как они здесь определены, хорошо известны в теории игр; они встречаются и во многих других областях, имеющих отношение к теории графов.

Пример. Каждая из двух машин может находиться в определенном числе состояний. Множество состояний первой машины обозначим через X_1 ; если состояние x'_1 может следовать за состоянием x_1 , то полагаем $x'_1 \in \Gamma_1 x_1$. Тем самым определен граф $G_1 = (X_1, \Gamma_1)$; точно так же определяется граф $G_2 = (X_2, \Gamma_2)$ для второй машины.

Оператор, который может использовать любую из этих двух машин, запишет в виде (x_1, x_2) ситуацию, когда первая машина находится в состоянии x_1 , а вторая — в состоянии x_2 . Если оператор приведет в действие обе машины одновременно, то граф ситуаций будет $G_1 \times G_2$. Если же оператор станет каждый раз приводить в действие только одну из машин, то граф ситуаций будет $G_1 + G_2$.

Сохраняют ли операции над графами свойство допускать функцию Гранди? Прежде чем подойти к этому вопросу, мы должны ввести понятие *d-суммы* порядковых чисел; сначала вспомним, что *двоичным разложением* целого числа c называется такая строчка (c^1, c^2, \dots, c^k) чисел c^i (которые могут быть только нулями или единицами), что

$$c = c^1 + 2c^2 + 4c^3 + \dots + 2^{k-1}c^k.$$

Короче пишут

$$c = c^k c^{k-1} \dots c^2 c^1.$$

Эта *двоичная запись* образуется по тому же принципу, что и десятичная, и легко установить соответствие:

десятичная запись	двоичная запись	двоичное разложение	десятичная запись	двоичная запись	двоичное разложение
0	0	(0)	6	110	(0, 1, 1)
1	1	(1)	7	111	(1, 1, 1)
2	10	(0, 1)	8	1000	(0, 0, 0, 1)
3	11	(1, 1)	9	1001	(1, 0, 0, 1)
4	100	(0, 0, 1)	10	1010	(0, 1, 0, 1)
5	101	(1, 0, 1)	11	1011	(1, 1, 0, 1)

В арифметике $[n]_{(2)}$, или „ n по модулю 2^a “, означает остаток (равный нулю или единице) от деления n на 2.

По определению, *d-сумма* (подробно: *поразрядная двоичная сумма по модулю два*) целых чисел c_1, c_2, \dots, c_n есть целое число $c = c_1 \dot{+} c_2 \dot{+} \dots \dot{+} c_n$, которое получится, если произвести двоичные разложения $c_k = (c_k^1, c_k^2, \dots)$ и положить

$$c = \left(\left[\sum_{k=1}^n c_k^1 \right]_{(2)}, \left[\sum_{k=1}^n c_k^2 \right]_{(2)}, \left[\sum_{k=1}^n c_k^3 \right]_{(2)}, \dots \right).$$

Так,

$$3 \dot{+} 7 = (1, 1) \dot{+} (1, 1, 1) = (0, 0, 1) = 4,$$

$$1 \dot{+} 3 \dot{+} 11 = (1) \dot{+} (1, 1) \dot{+} (1, 1, 0, 1) = (1, 0, 0, 1) = 9 \text{ и т. д.}$$

Эти понятия без труда переносятся на трансфинитные порядковые числа; например, двоичное разложение порядкового числа $\alpha = \omega^2 4 + \omega 3 + 7$ есть вполне упорядоченное множество $(c^1, c^2, \dots, c^{\omega+1}, c^{\omega+2}, \dots)$ чисел, равных нулю или единице, которое образуется следующим образом: первая последовательность (от c^1 до $c^{\omega+1}$) есть двоичное разложение числа 7, за которым идет бесконечное множество нулей; вторая последовательность (от $c^{\omega+1}$ до $c^{2\omega+1}$) есть двоичное разложение числа 3 с последующим бесконечным множеством нулей; третья последовательность есть двоичное разложение числа 4 (дальнейшие члены, все равные нулю, не пишутся); итак

$$\omega^2 4 + \omega 3 + 7 = (1, 1, 1, 0, 0, \dots; 1, 1, 0, 0, \dots; 0, 0, 1).$$

d -сумма порядковых чисел образуется, как и в случае конечных чисел, сложением по модулю 2 членов, стоящих на одноименных местах; заметим, что d -сумма трансфинитных порядковых чисел легко получается с помощью таблицы d -сложения конечных чисел; например:

$$(\omega 3 + 1) \dot{+} (\omega 7 + 3) \dot{+} 11 = \omega(3 \dot{+} 7) + (1 \dot{+} 3 \dot{+} 11) = \omega 4 + 9.$$

Теорема 7. d -сумма $\dot{+}$ обладает следующими свойствами:

- (1) ассоциативность $(\alpha \dot{+} \beta) \dot{+} \gamma = \alpha \dot{+} (\beta \dot{+} \gamma)$;
- (2) существование нейтрального элемента 0, для которого $\alpha \dot{+} 0 = \alpha$;
- (3) существование для любого α противоположного элемента $\dot{-}\alpha$, удовлетворяющего условию $\alpha \dot{+} (\dot{-}\alpha) = 0$;
- (4) коммутативность $\alpha \dot{+} \beta = \beta \dot{+} \alpha$;

(на языке алгебры первые три свойства выражают тот факт, что порядковые числа образуют группу относительно операции d -сложения, а четвертое — что эта группа абелева).

(Непосредственно.)

Следствие. Для любых двух порядковых чисел α и β существует такое порядковое число x , притом единственное, что $\alpha \dot{+} x = \beta$.

Это хорошо известное свойство групп; достаточно положить $x = (\dot{-}\alpha) \dot{+} \beta = \beta \dot{-} \alpha$.

Теорема 8. Если графы G_1, G_2, \dots, G_n допускают соответственно функции Гранди g_1, g_2, \dots, g_n , то граф $G = G_1 \dot{+} G_2 \dot{+} \dots \dot{+} G_n$ также допускает функцию Гранди g , значение которой в вершине $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ выражается d -суммой:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_1(x_1) \dot{+} g_2(x_2) \dot{+} \dots \dot{+} g_n(x_n).$$

Покажем, что функция $g(x)$, определенная таким образом на множестве $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, есть функция Гранди для суммы $G = (X, \Gamma)$.

1° Для любого порядкового числа $\beta < g(x)$ в Γx существует такая вершина y , что $g(y) = \beta$.

В самом деле, рассмотрим двоичные разложения:

$$\begin{aligned} g_k(x_k) &= (c_k^1, c_k^2, \dots); \\ g(x) &= (c^1, c^2, \dots), \quad \text{где} \quad c^r = \left[\sum_{k=1}^n c_k^r \right]_{(2)}; \\ \beta &= (\beta^1, \beta^2, \dots), \quad \text{где} \quad \beta < g(x). \end{aligned}$$

Пусть r — наибольшее порядковое число, для которого $\beta^r \neq c^r$ [такое есть, поскольку $\beta \neq g(x)$ ¹⁾]; ввиду того что $\beta < g(x)$, имеем

$$\beta^r = 0; \quad c^r = \left[\sum_{k=1}^n c_k^r \right]_{(2)} = 1.$$

Значит, среди чисел $c_1^r, c_2^r, \dots, c_n^r$ имеется хотя бы одно, равное единице; например, пусть $c_1^r = 1$. Положим

$$d^s = \begin{cases} c_1^s, & \text{если } \beta^s = c^s; \\ [c_1^s + 1]_{(2)}, & \text{если } \beta^s \neq c^s. \end{cases}$$

В $\Gamma_1 x_1$ существует такая вершина y_1 , что $g_1(y_1) = (d^1, d^2, \dots)$, и мы имеем

$$g(y_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = g_1(y_1) \dot{+} g_2(x_2) \dot{+} \dots \dot{+} g_n(x_n) = \beta.$$

2° В множестве Γx нет такого y , для которого было бы $g(y) = g(x)$.

В самом деле, рассмотрим вершину $y = (y_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, где $y_1 \in \Gamma_1 x_1$, и положим

$$g_1(y_1) = (d^1, d^2, \dots).$$

Так как $g_1(y_1) \neq g_1(x_1)$, то $d^r \neq c_1^r$ для некоторого порядкового числа r и

$$[d^r \dot{+} c_2^r \dot{+} c_3^r \dot{+} \dots \dot{+} c_n^r]_{(2)} \neq [c_1^r \dot{+} c_2^r \dot{+} \dots \dot{+} c_n^r]_{(2)}.$$

Следовательно, $g(y) \neq g(x)$.

Этот результат, дающий правило вычисления функции Гранди для суммы графов, будет играть фундаментальную роль в последующих главах.

¹⁾ И поскольку в двоичное разложение любого порядкового числа входит лишь конечное число единиц. — *Прим. ред.*

Г Л А В А 4

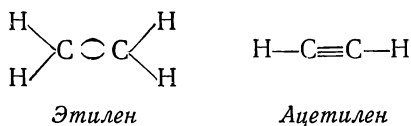
Основные числа теории графов

Цикломатическое число

Понятие, которое мы собираемся здесь ввести, не зависит от „ориентации“. Для большей общности введем в рассмотрение не просто графы, а *мультиграфы*; по определению, *мультиграф* (X, U) — это пара, образованная множеством X вершин и множеством U ребер, соединяющих некоторые пары вершин; в противоположность обычным графам у мультиграфа одна и та же пара вершин может соединяться более чем одним ребром.

Во многих задачах удобно вместо обычных графов рассматривать мультиграфы.

Пример (химия). Молекула представляется мультиграфом, вершины которого обозначены символами таблицы Менделеева (Пойа [4] применил теорию графов к органической химии для подсчета числа изомеров химических соединений). Говорят также, что этилен является 2-графом, ацетилен — 3-графом) и т. д. (см. рис. 4 — 1).



Р и с. 4—1.

Рассмотрим мультиграф G с n вершинами, m ребрами, p компонентами связности. Положим

$$\rho(G) = n - p,$$

$$\nu(G) = m - \rho(G) = m - n + p;$$

$\nu(G)$ называется *цикломатическим числом* мультиграфа G . Его свойства играют важную роль¹⁾.

¹⁾ Цикломатическим числом *графа* называется цикломатическое число того 2-графа, который получится, если каждую дугу заменить ребром. — Прим. перев.

Теорема 1. Пусть G' — мультиграф, полученный из мультиграфа G добавлением нового ребра между вершинами a и b ; если a и b совпадают или могут быть соединены цепью в G , то

$$\rho(G') = \rho(G), \quad \nu(G') = \nu(G) + 1;$$

в противном случае

$$\rho(G') = \rho(G) + 1, \quad \nu(G') = \nu(G).$$

(Непосредственно.)

Следствие. $\rho(G) \geq 0, \quad \nu(G) \geq 0.$

В самом деле, для графа, образованного всеми вершинами G , но без ребер, имеем $\rho = 0, \nu = 0$. Каждое добавление ребра либо увеличивает ρ , не меняя ν , либо увеличивает ν , не меняя ρ ; таким образом, в процессе построения графа G числа ρ и ν могут только возрастать.

Для дальнейшего удобно следующим образом отождествлять циклы мультиграфа с векторами: придадим каждому ребру мультиграфа G произвольную ориентацию; если цикл μ проходит через ребро u_k в направлении его ориентации r_k раз и в противоположном направлении s_k раз, то полагаем $c^k = r_k - s_k$. Вектор

$$(c^1, c^2, \dots, c^k, \dots, c^m)$$

m -мерного пространства \mathbf{R}^m будем называть *вектором-циклом*, соответствующим циклу μ , и обозначать через μ (или опять через μ , если это не может привести к недоразумению).

Циклы μ, μ', μ'', \dots называются *независимыми*, если соответствующие им векторы линейно независимы¹⁾. Отметим, что это свойство не зависит от выбора ориентации ребер.

¹⁾ Напомним некоторые классические определения линейной алгебры. Если $\mathbf{c} = (c^1, c^2, \dots, c^m)$ и $\mathbf{d} = (d^1, d^2, \dots, d^m)$ — два вектора из \mathbf{R}^m , а $\alpha \in \mathbf{R}$, то полагаем

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{c} &= (\alpha c^1, \alpha c^2, \dots, \alpha c^m), \\ -\mathbf{c} &= (-c^1, -c^2, \dots, -c^m), \\ \mathbf{c} + \mathbf{d} &= (c^1 + d^1, c^2 + d^2, \dots, c^m + d^m), \\ \mathbf{0} &= (0, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Множество $E \subset \mathbf{R}^m$ представляет собой *векторное подпространство*, если

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathbf{R}, \mathbf{c} \in E &\Rightarrow \alpha \mathbf{c} \in E, \\ \mathbf{c}, \mathbf{d} \in E &\Rightarrow \mathbf{c} + \mathbf{d} \in E. \end{aligned}$$

Говорят, что векторы $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_k$ из \mathbf{R}^m *линейно независимы*, если

$$\alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{c}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Напротив, когда для некоторых чисел α_i , не равных одновременно нулю, $\alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{c}_k = \mathbf{0}$, говорят, что данные векторы *линейно*

Имеет место

Теорема 2. *Цикломатическое число $\nu(G)$ мультиграфа G равно наибольшему количеству независимых циклов.*

Действительно, возьмем граф без ребер, образованный всеми вершинами G , и, добавляя к нему ребро за ребром, построим данный мультиграф G . В силу теоремы 1, цикломатическое число увеличивается на единицу, когда добавление ребра приводит к образованию новых циклов, и не меняется в противоположном случае. Допустим, что перед добавлением ребра u_k уже имелась база, состоящая из независимых циклов μ_1, μ_2, \dots , и что добавление u_k повлекло за собой возникновение циклов ν_1, ν_2, \dots . Среди новых циклов наверняка имеются простые; пусть, например, ν_1 — простой, $\nu_1^k = 1$. Очевидно, ν_1 не может линейно выражаться через μ_i (ибо $\mu_1^k = \mu_2^k = \dots = 0$). С другой стороны, ν_2 (и аналогично ν_3, \dots) можно линейно выразить через $\nu_1, \mu_1, \mu_2, \dots$: в самом деле, вектор $\nu_2 - \nu_2^k \nu_1$ соответствует некоторому циклу, не содержащему u_k (этот цикл получается из ν_2 заменой ребра u_k оставшейся частью ν_1 с измененным направлением обхода), и, значит, линейно выражается через μ_1, μ_2, \dots . Таким образом, каждый шаг, увеличивающий на единицу цикломатическое число, в то же время увеличивает на единицу наибольшее количество независимых циклов. Теорема доказана.

Следствие 1. *Граф G не имеет циклов тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 0$.*

Следствие 2. *Граф G имеет один единственный цикл тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 1$.*

Теорема 3. *В сильно связном графе цикломатическое число равно наибольшему количеству независимых контуров.*

В самом деле, рассмотрим 2-граф, получающийся заменой дуг данного графа G ребрами, и элементарный цикл μ ; вершины, встречающиеся в цикле μ , можно распределить по следующим множествам: множество S точек, обладающих тем свойством, что одна из дуг μ исходит из точки, а другая заходит в нее; множество S'

зависимы. Если $\alpha_1 \neq 0$, то можно также написать

$$c_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} c_2 + \dots + \frac{\alpha_k}{\alpha_1} c_k;$$

в этом случае говорят, что c_1 линейно выражается через c_2, c_3, \dots, c_k .

База векторного подпространства E есть такое множество векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ из E , что каждый вектор подпространства E линейно выражается через векторы e_i ; наименьшее из чисел k называется размерностью подпространства E .

В $E = R^m$ одна из баз образуется векторами

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_m = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

точек, из которых исходит по две дуги μ ; множество S'' точек, в которые заходит по две дуги μ (см. рис. 4—2).

Так как количество конечных точек равно количеству начальных, то $|S'| = |S''|$; итак, пусть x'_1, x'_2, \dots, x'_k — элементы S' , а $x''_1, x''_2, \dots, x''_k$ — элементы S'' .

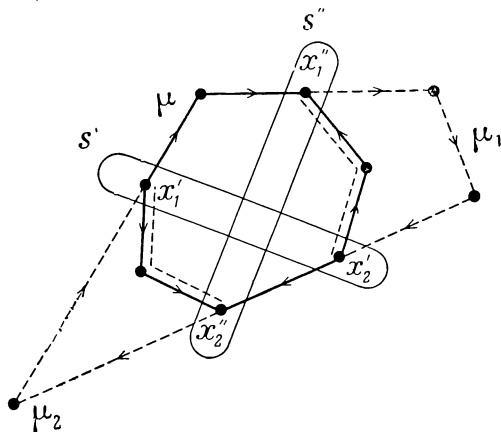


Рис. 4—2.

В цикле μ элементы S' чередуются с элементами S'' , и мы предположим нумерацию вершин такой, что первая вершина после x'_i , не принадлежащая S , есть x''_i ; наконец, если μ_0 — путь, в котором вершина x встречается раньше вершины y , то обозначим через $\mu_0[x, y]$ частичный путь из x в y . Поскольку граф сильно связан, существует контур μ_i , проходящий через x'_{i+1} и x''_i и содержащий дуги μ на пути от x'_{i+1} к x''_i . Цикл μ является линейной комбинацией контуров, ибо можно написать

$$\begin{aligned} \mu &= \mu[x'_1, x''_1] - \mu_1[x'_2, x''_1] + \mu[x'_2, x''_2] + \dots = \\ &= \mu[x'_1, x''_1] + \mu_1[x''_1, x'_2] + \mu[x'_2, x''_2] + \mu_2[x''_2, x'_3] + \dots \\ &\quad \dots - (\mu_1 + \mu_2 + \dots). \end{aligned}$$

Значит, каждый элементарный цикл есть линейная комбинация контуров, и то же справедливо для произвольного цикла (поскольку он является линейной комбинацией элементарных).

В \mathbb{R}^m контуры образуют базу векторного подпространства, порожденного циклами, и в силу теоремы 2 эта база имеет размерность $\nu(G)$; поэтому наибольшее число независимых контуров равно $\nu(G)$.

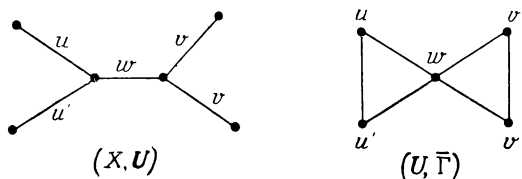
Хроматическое число

Пусть дано натуральное число p ; говорят, что граф G является p -хроматическим, если его вершины можно раскрасить p различными цветами таким образом, чтобы никакие две смежные вершины

1° каждое ребро графа можно окрасить в какой-нибудь из q цветов таким образом, чтобы никакие два смежных ребра не были окрашены одинаково;

2° это невозможно сделать с помощью только $q - 1$ цветов.

Хроматический класс графа (X, U) совпадает с хроматическим числом графа $(U, \bar{\Gamma})$, определяемого следующим образом: вершинами его служат ребра исходного графа, и $u' \in \bar{\Gamma}u$, когда



Р и с. 4—4.

ребра u и u' исходного графа смежны (см. рис. 4—4). Таким образом, задача определения хроматического класса сводится к изучению хроматического числа.

Приводим несколько основных результатов, относящихся к хроматическим числам.

Теорема Кёнига. *Граф является бихроматическим (т. е. имеет хроматическое число ≤ 2) в том и только в том случае, если он не содержит циклов нечетной длины.*

(1) Рассмотрим граф (X, U) без нечетных циклов и покажем, что он — бихроматический. Граф можно предполагать связным (в противном случае мы рассмотрели бы все его компоненты связности отдельно). Будем последовательно раскрашивать вершины по следующему правилу:

1° произвольную вершину a окрашиваем в синий цвет;

2° если вершина x уже оказалась синей, то все смежные с ней вершины окрашиваем в красный цвет; если вершина u — красная, то все смежные с ней окрашиваем в синий цвет.

Так как граф связан, каждая его вершина рано или поздно окажется окрашенной, причем никакая вершина x не будет одновременно синей и красной, ибо иначе x и a находились бы на одном цикле нечетной длины. Следовательно, граф — бихроматический.

(2) Если граф — бихроматический, то он, очевидно, не содержит циклов нечетной длины, ибо вершины такого цикла невозможно окрасить двумя цветами в соответствии с указанным требованием.

Замечание. Свойство:

(1) *Граф G не имеет циклов нечетной длины* равносильно свойству:

(2) *граф G не имеет элементарных циклов нечетной длины.*

Непосредственно ясно, что $(1) \Rightarrow (2)$; для доказательства того, что $(2) \Rightarrow (1)$, допустим, что существует цикл $\mu = [x_0, x_1, \dots, x_p = x_0]$ нечетной длины p . Каждый раз, когда имеются такие две вершины x_j и x_k , что $j < k < p$ и $x_j = x_k$, цикл μ можно разбить на два частичных цикла $\mu[x_j, x_k]$ и $\mu[x_0, x_j] + \mu[x_k, x_0]$, причем ровно один из этих двух циклов имеет нечетную длину.

Ясно, что если продолжать таким же образом разбивать цикл μ , пока это возможно, то всякий раз будет оставаться в точности один цикл нечетной длины; дойдя в конце концов до элементарных циклов, мы получим противоречие с (2).

Эти результаты позволяют легко распознавать бихроматические графы; что же касается других графов, то для них графические методы определения хроматического числа неизвестны. Отметим, однако, что во многих случаях благодаря следующей теореме действенным орудием оказывается понятие функции Гранди.

Теорема 4. Пусть G — симметрический граф. Чтобы граф G был p -хроматическим, необходимо и достаточно, чтобы он допускал функцию Гранди $g(x)$, для которой

$$\max_{x \in X} g(x) \leq p - 1.$$

1° Если такая функция $g(x)$ существует, то граф G является p -хроматическим: в самом деле, достаточно числам $0, 1, \dots, p - 1$ поставить в соответствие различные цвета и окрасить каждую вершину x в тот цвет, который отвечает числу $g(x)$.

2° Предположим, что граф p -хроматический, и докажем, что на G существует функция Гранди, значения которой не превышают $p - 1$.

Пусть S_0, S_1, \dots, S_{p-1} — множества вершин с одинаковыми цветами. Присоединим к S_0 все вершины из S_1 , не смежные ни с одной из вершин S_0 . Далее присоединим к S_0 все вершины из S_2 , не смежные ни с одной из вершин S_0 и вершин S_1 , ранее присоединенных к S_0 . Затем последовательно поступим подобным же образом с множествами S_3, \dots, S_{p-1} . В результате получим множество $\bar{S}_0 \supset S_0$. Пополняя подобным же образом множество $S_1 \setminus \bar{S}_0$ не смежными с ним вершинами из $S_2 \setminus \bar{S}_0$, а затем из $S_3 \setminus \bar{S}_0$ и т. д., получим множество \bar{S}_1 . Аналогично определяем множество \bar{S}_2 , затем \bar{S}_3 и т. д.

Функция $g(x)$, равная k при $x \in \bar{S}_k$, есть функция Гранди для графа G , что и требовалось.

Указания для нахождения хроматического числа. Рассмотрим граф G с n вершинами и t ребрами; для нахождения его хрома-

тического числа можно воспользоваться эмпирическим способом, весьма простым, непосредственно применимым, но не всегда эффективным; можно использовать и аналитический метод, который систематически дает решение, но требует, вообще говоря, применения электронной вычислительной машины¹⁾.

Эмпирический способ состоит в том, чтобы, отправляясь от произвольной раскраски цветами $1, 2, \dots, p$, стараться постепенно исключить какой-либо из этих цветов (который объявляется „критическим цветом“). Для этого рассмотрим вершину x , имеющую этот критический цвет, и компоненты связности $C_1^{jk}, C_2^{jk}, \dots$ подграфа, порожденного вершинами двух некритических цветов j и k . Если множества $C_1^{jk} \cap \Gamma x, C_2^{jk} \cap \Gamma x$ и т. д. не являются двухцветными, то имеется возможность сразу изменить цвет вершины x : берем отдельно каждую компоненту C^{jk} , для которой все вершины $C^{jk} \cap \Gamma x$ имеют цвет j , затем меняем ролями в этой компоненте цвета j и k (не меняя цветов других вершин) и, наконец, окрашиваем краской j вершину x (теперь уже не смежную ни с какой вершиной цвета j).

Аналитический метод проверки возможности раскрашивания графа G посредством p цветов состоит в следующем. Каждому раскрашиванию p цветами можно поставить в соответствие систему таких чисел ξ_q^i (где $i = 1, 2, \dots, n$; $q = 1, 2, \dots, p$), что

$$\xi_q^i = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ имеет цвет } q; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим

$$r_j^i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \text{ — граничная точка ребра } u_j; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача сводится теперь к отысканию таких целых чисел ξ_q^i , что

$$1^\circ \xi_q^i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; q = 1, 2, \dots, p);$$

$$2^\circ \sum_{q=1}^p \xi_q^i = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$3^\circ \sum_{k=1}^n r_j^k \xi_q^k \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, m; q = 1, 2, \dots, p).$$

Мы получили систему *линейных неравенств*, соответствующую, как легко видеть, известным методам „линейных программ“; однако

¹⁾ Существует еще рекуррентный способ, (см. [6], [7], [8]). — *Прим. перев.*

в данном случае требуется выяснить, имеет ли эта система решения *в целых числах*, и только совсем недавно был разработан систематический способ для нахождения такого решения¹⁾.

Рассмотрим теперь два различных графа G и H ; может оказаться желательным определить хроматическое число их суммы $G + H$ или их произведения $G \times H$ (см. гл. 3). Имеют место следующие результаты:

Теорема 5. Пусть G — $(p+1)$ -хроматический граф, H — $(q+1)$ -хроматический граф; обозначим через r наибольшую из d -сумм $p' + q'$, где $p' \leq p$, $q' \leq q$; тогда граф $G + H$ является $(r+1)$ -хроматическим.

Действительно, всегда можно предположить, что графы G и H симметрические (это никак не изменит ребер графа $G + H$); построим для G функцию Гранди $g(x)$ с наибольшим значением, не превосходящим p , а для H — функцию Гранди $h(x)$ с наибольшим значением, не превосходящим q , в соответствии с предыдущей теоремой. В силу теоремы 8 (гл. 3) граф $G + H$ допускает функцию Гранди с наибольшим значением, не превосходящим r ; отсюда и следует справедливость утверждения.

Например, читатель легко проверит, что если G 6-хроматический, а H 7-хроматический граф, то граф $G + H$ является 8-хроматическим, потому что

$$r = 6 + 1 = (1, 1, 1) = 7.$$

Теорема 6. Если G и H — два различных графа с хроматическими числами p и q , а $r = \min\{p, q\}$, то граф $G \times H$ является r -хроматическим.

Предположим для определенности, что $p \leq q$, и раскрасим граф G с помощью p цветов; в графе $G \times H$ придадим вершине $\xi = (x, y)$ тот же цвет, который имеет x в G . Тогда смежные вершины графа $G \times H$ будут иметь различные цвета (ибо иначе в G имелись бы одинаково окрашенные смежные вершины).

Ч. И. Т. Д.

Эту теорему можно выразить еще и так:

$$\gamma(G \times H) \leq \min\{\gamma(G), \gamma(H)\}.$$

¹⁾ Этот систематический способ, которым мы обязаны Гомори [9], основывается на симплекс-методе Дандига (G. Dantzig) и в общих чертах состоит в том, что сначала решается обычная линейная программа, а затем если какой-нибудь из переменных в этом решении отвечает нецелое число, то составляется некоторая новая система неравенств, которым удовлетворяют искомые целочисленные значения, но не удовлетворяют уже найденные.

Число внутренней устойчивости

Рассмотрим граф $G = (X, \Gamma)$; множество $S \subset X$ называется *внутренне устойчивым*, если никакие две вершины S не смежны, другими словами, если

$$\Gamma S \cap S = \emptyset.$$

Обозначим через \mathcal{S} семейство всех внутренне устойчивых множеств графа; имеем

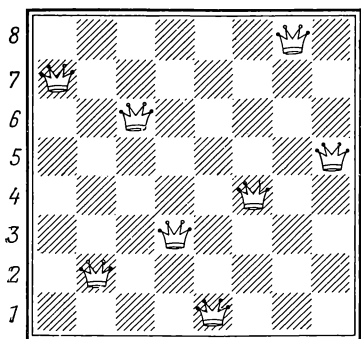
$$\begin{aligned} \emptyset &\in \mathcal{S}, \\ S \in \mathcal{S}, A \subset S &\Rightarrow A \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

По определению, *число внутренней устойчивости* графа G есть

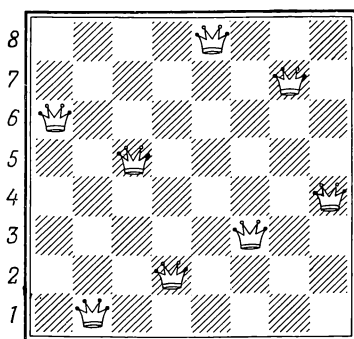
$$\alpha(G) = \max_{S \in \mathcal{S}} |S|.$$

ПРИМЕР 1 (Гаусс). *Задача о восьми ферзях.*

Можно ли на шахматной доске расставить восемь ферзей так, чтобы ни один из них не находился под ударом какого-либо другого? Эта известная задача сводится к нахождению наибольшего



(72631485)



(61528374)

Рис. 4—5.

внутренне устойчивого множества в симметрическом графе с 64 вершинами (клетки шахматной доски), где $y \in \Gamma x$, когда клетки x и y находятся на одной и той же горизонтали, вертикали или диагонали. Задача значительно труднее, чем кажется на первый взгляд: Гаусс первоначально предполагал 76 решений, а в берлинском шахматном журнале „Schachzeitung“ в 1854 году было опубликовано всего 40 позиций, найденных различными любителями шахмат. На самом же деле существует 92 решения, как показывают следующие 12 диаграмм:

(72631485)	(61528374)	(58417263)
(35841726)	(46152837)	(57263148)
(16837425)	(57263184)	(48157263)
(51468273)	(42751863)	(35281746)

Каждой перестановке отвечает диаграмма, как на рис. 4 — 5, а каждая диаграмма, кроме той, которая соответствует последней перестановке, порождает восемь различных решений: три возникают при повороте данной диаграммы на 90° , 180° и 270° , а остальные четыре — при зеркальном отображении каждой из четырех получившихся диаграмм относительно главной диагонали; последняя перестановка (35281746) дает только четыре решения, так как соответствующая диаграмма при повороте доски на 180° переходит сама в себя.

ПРИМЕР 2. *Кликой* симметрического графа называется такое множество $C \subseteq X$, что

$$x \in C, y \in C \Rightarrow y \in \Gamma x.$$

Если X — множество лиц, а $y \in \Gamma x$ означает согласие между x и y , то часто требуется разыскать „максимальную клику“, т. е. общество с наибольшим числом членов. Определим отображение Γ' следующим образом:

$$y \in \Gamma' x \iff y \notin \Gamma x.$$

Задача сводится к нахождению наибольшего внутренне устойчивого множества в графе (X, Γ') .

ПРИМЕР 3. *Задача о пятнадцати девушках*, которая была предметом многочисленных математических работ, может быть сформулирована следующим образом: в пансионе воспитываются пятнадцать молодых девушек, которых мы обозначим буквами $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o$; они ежедневно выходят на прогулку тройками; возможно ли в течение семи дней составлять тройки таким образом, чтобы никакие две девушки не попадали в одну и ту же тройку более одного раза?

Пользуясь соображениями симметрии, Кэли нашел следующее решение:

Воскресенье	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница	Суббота
afk	abe	alm	ado	agn	ahj	aci
bgl	cno	bcf	bik	bdj	bmh	bho
chm	dfl	deh	cjl	cek	cdg	dkm
din	ghk	gio	egm	fmo	efi	eln
ejo	ijm	jkn	fhn	hil	klo	fgj

Задача о пятнадцати девушках родственна другой, столь же известной задаче, которую мы назовем *вспомогательной задачей*: можно ли из 15 девушек последовательно составить 35 различных троек так, чтобы никакие две девушки не входили вместе более чем

в одну тройку? Для решения вспомогательной задачи достаточно построить граф G , вершинами которого служат все 455 возможных троек, причем две тройки считаются смежными, когда в эти тройки входят одни и те же две девушки; тогда требуется найти наибольшее внутренне устойчивое множество. Имеем $\alpha(G) \leq 35$, так как никакая девушка не может входить более чем в семь различных троек, а это дает самое большое $15 \times 7 \times \frac{1}{3} = 35$ троек; поэтому всякое внутренне устойчивое множество из 35 троек максимально.

Чтобы показать, что решение вспомогательной задачи дает также ответ на задачу о пятнадцати девушках, построим граф G' , вершинами которого служат какие-либо 35 троек, дающие решение вспомогательной задачи, причем две тройки считаются смежными, когда в них входит одна и та же девушка; если хроматическое число $\gamma(G')$ равно 7, то задача о пятнадцати девушках решена; если же $\gamma(G') > 7$, то надо выбрать другое множество троек, дающее решение вспомогательной задачи. Нетрудно проверить, что существуют такие решения вспомогательной задачи, которые не приводят к решению задачи о пятнадцати девушках.

Замечание 1. Хроматическое число $\gamma(G)$ и число внутренней устойчивости $\alpha(G)$ связаны неравенством

$$\alpha(G) \cdot \gamma(G) \geq |X|.$$

В самом деле, можно разбить X на $\gamma(G)$ внутренне устойчивых множеств, образованных вершинами одинакового цвета и содержащих соответственно $m_1, m_2, \dots, m_\gamma$ вершин. Поэтому

$$\begin{aligned} |X| &= m_1 + m_2 + \dots \\ &\dots + m_\gamma \leq \alpha(G) + \alpha(G) + \dots \\ &\dots + \alpha(G) = \gamma(G) \cdot \alpha(G). \end{aligned}$$

Замечание 2. Можно поставить вопрос, не являются ли связи между обоими понятиями более тесными и нельзя ли найти хроматическое число, окрашивая сначала в цвет (1) наибольшее внутренне устойчивое множество S_1 , затем в цвет (2) наибольшее внутренне

устойчивое множество S_2 подграфа, порожденного вершинами $X \setminus S_1$, далее в цвет (3) наибольшее внутренне устойчивое множество оставшегося подграфа и т. д. Оказывается, это не так, что видно на примере графа, изображенного на рис. 4—6 (его хроматическое число, очевидно, равно 4): вершины, изображенные белыми кружками, образуют единственное наибольшее внутренне устойчивое множество,

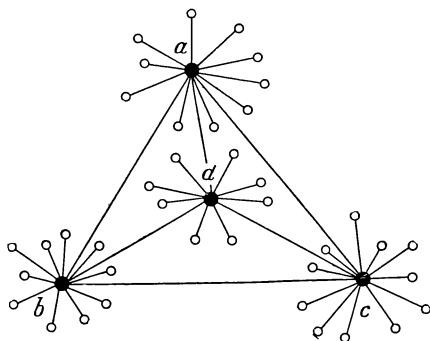


Рис. 4—6.

но если их окрасить в один цвет, то остальные вершины a, b, c, d надо было бы окрасить с помощью только трех цветов, а это, очевидно, невозможно.

Иногда для двух графов G и H возникает вопрос о нахождении числа внутренней устойчивости произведения $G \times H$.

ПРИМЕР (Шеннон [5]). *Задача об информационной емкости множества сигналов.*

Рассмотрим простейший случай одного передатчика, который может передавать пять сигналов a, b, c, d, e ; при приеме каждый из этих сигналов может быть истолкован двояко: сигнал a дает p или q , сигнал b дает q или r , и т. д. ..., как показано на схеме, изображенной на рис. 4—7. Какое наибольшее число сигналов можно

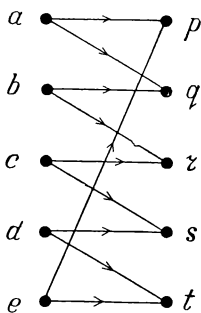


Рис. 4—7.

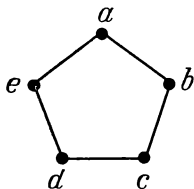


Рис. 4—8.

принять, не рискуя спутать их друг с другом? Задача сводится к нахождению наибольшего внутренне устойчивого множества S графа G (рис. 4—8), где две вершины смежны, если они представляют такие сигналы, которые можно спутать при приеме; очевидно, $\alpha(G) = 2$ и можно взять $S = \{a, c\}$.

Вместо однобуквенных сигналов можно пользоваться „словами“ из двух букв с таким расчетом, чтобы эти слова

не путались друг с другом при приеме. Из букв a и c , которые нельзя спутать, составляется код: aa, ac, ca, cc ; таким образом, получаются $[\alpha(G)]^2 = 4$ слова. Но можно составить еще более богатый код: aa, bc, ce, db, ed . (Непосредственно проверяется, что никакие два из этих слов спутать одно с другим при приеме нельзя.)

Назовем здесь *произведением* двух графов $G = (X, U)$ и $H = (Y, V)$ граф $G \times H$, вершинами которого служат пары xu , где $x \in X, u \in Y$, причем две вершины xu и $x'u'$ смежны, если они удовлетворяют одному из следующих условий:

- 1° $x = x', (y, y') \in V$;
- 2° $(x, x') \in U, y = y'$;
- 3° $(x, x') \in U, (y, y') \in V$.

(Это определение несколько отличается от определения, данного в гл. 3, но мы не будем вводить другого обозначения.) Для графа G , изображенного на рис. 4—8, два слова xu и $x'u'$ могут быть перепутаны, если они являются двумя смежными вершинами графа-про-

изведения $G \times G = G^2$, и богатство кода с двухбуквенными словами выражается числом $\alpha(G^2) = 5$; в более общем случае богатство кода с n -буквенными словами выражается числом внутренней устойчивости графа-произведения

$$G^n = G \times G \times \dots \times G.$$

Лемма 1. Для двух графов G и H

$$\alpha(G \times H) \geq \alpha(G) \cdot \alpha(H).$$

Действительно, если S и T — наибольшие внутренне устойчивые множества соответственно для G и H , то декартово произведение $S \times T$ является внутренне устойчивым в графе $G \times H$, откуда

$$\alpha(G \times H) \geq |S \times T| = |S| \times |T| = \alpha(G) \alpha(H).$$

Эта лемма подсказывает нам следующее определение: назовем емкостью графа G число

$$\theta(G) = \sup_n \sqrt[n]{\alpha(G^n)}.$$

Имеем $\theta(G) \geq \alpha(G)$; мы собираемся показать, что почти всегда

$$\theta(G) = \alpha(G).$$

Между прочим, Шеннон установил, что граф G , изображенный на рис. 4—8, является единственным графом с числом вершин менее шести, для которого $\theta(G) \neq \alpha(G)$; фактически его емкость $\theta(G)$ не удалось определить, и известно лишь, что

$$\sqrt{5} \leq \theta(G) \leq \frac{5}{2}.$$

Рассмотрим однозначное отображение σ множества X в себя; такое отображение называется *сохранным*, если

$$y \neq x, \quad y \notin \Gamma x \Rightarrow \sigma(y) \neq \sigma(x), \quad \sigma(y) \notin \Gamma \sigma(x).$$

Это отображение сохраняет свойство пары вершин „быть несмежными и различными“.

Лемма 2. Сохранное отображение σ переводит внутренне устойчивое множество S во внутренне устойчивое множество $\sigma(S)$, и при этом $|S| = |\sigma(S)|$.

В самом деле, ввиду однозначности отображения σ имеем $|\sigma(S)| \leq |S|$, а так как σ сохранно, то $|\sigma(S)| = |S|$.

Лемма 3. Если множество $\sigma(X)$ внутренне устойчиво, то число внутренней устойчивости графа G есть $\alpha(G) = |\sigma(X)|$.

Действительно, раз $\sigma(X)$ внутренне устойчиво, то

$$|\sigma(X)| \leq \max_{S \in \mathcal{S}} |S| = \alpha(G).$$

С другой стороны, если S_0 — наибольшее внутренне устойчивое множество, то, в силу леммы 2,

$$|\sigma(X)| \geq |\sigma(S_0)| = |S_0| = \alpha(G).$$

Отсюда

$$\alpha(G) = |\sigma(X)|.$$

Теорема 7 (Шеннон). *Если хотя бы для одного из графов G и H существует сохраняющее отображение σ , переводящее множество вершин этого графа во внутренне устойчивое множество, то*

$$\alpha(G \times H) = \alpha(G) \alpha(H).$$

Достаточно показать, что $\alpha(G \times H) \leq \alpha(G) \alpha(H)$; пусть σ — сохраняющее отображение для G , при котором $\sigma(X)$ внутренне устойчиво, и пусть σ_0 — отображение множества вершин графа $G \times H$ в себя, определенное следующим образом:

$$\sigma_0(x, y) = [\sigma(x), y].$$

Отображение σ_0 переводит две несмежные различные вершины $\xi = (x, y)$ и $\xi' = (x', y')$ в две несмежные различные вершины $(\sigma x, y)$ и $(\sigma x', y')$ и поэтому сохраняюще.

Если S_0 — наибольшее внутренне устойчивое множество графа $G \times H$, то $\alpha(G \times H) = |S_0| = |\sigma_0(S_0)|$ в силу леммы 2; распределим элементы $\sigma_0(S_0)$ по различным классам в зависимости от первой буквы каждого слова. Согласно лемме 3 получим $|\sigma(X)| = \alpha(G)$ различных классов. Поскольку никакие два элемента из $\sigma_0(S_0)$ не смежны, каждый класс имеет самое большее $\alpha(H)$ элементов, значит

$$\alpha(G \times H) = |\sigma_0(S_0)| \leq \alpha(G) \alpha(H).$$

Следствие. *Если множество вершин графа G при помощи сохраняющего отображения σ можно перевести во внутренне устойчивое множество, то емкость этого графа совпадает с числом внутренней устойчивости.*

В самом деле,

$$\alpha(G \times G) = [\alpha(G)]^2,$$

$$\alpha(G \times G \times G) = [\alpha(G)]^2 \alpha(G) = [\alpha(G)]^3$$

и т. д.;

отсюда

$$\theta(G) = \sup_n \sqrt[n]{\alpha(G^n)} = \alpha(G).$$

Число внешней устойчивости

Пусть дан граф $G = (X, \Gamma)$; говорят, что множество $T \subset X$ внешне устойчиво, если для каждой вершины $x \notin T$ имеем $\Gamma x \cap T \neq \emptyset$, иначе говоря, если $\Gamma^{-1}T \supset X \setminus T$,

Если \mathcal{J} — семейство всех внешне устойчивых множеств графа, то

$$X \in \mathcal{J},$$

$$T \in \mathcal{J}, A \supset T \Rightarrow A \in \mathcal{J}.$$

По определению, *число внешней устойчивости* графа G есть

$$\beta(G) = \min_{T \in \mathcal{J}} |T|.$$

Задача, которая нас сейчас интересует, заключается в построении внешне устойчивого множества с наименьшим числом элементов.

Пример 1. Задача о часовых. В тюрьме города N около каждой камеры может быть поставлен часовой. Однако часовой, стоящий, например, у камеры x_0 , видит также, что происходит в камерах x_1, x_2, x_3 и x_4 , от каждой из которых к камере x_0 идет коридор, как показано на рис. 4—9. Каково наименьшее количество часовых, необходимое для наблюдения за всеми камерами? Требуется найти число β внешней устойчивости симметрического графа, изображенного на рис. 4—9; для этого весьма простого плана $\beta = 2$.

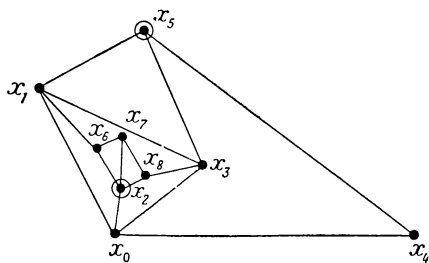


Рис. 4—9.

Пример 2. Задача о пяти ферзях.

Сколько ферзей достаточно расставить на шахматной доске так, чтобы каждая клетка доски находилась под ударом хотя бы одного из них? ¹⁾ Эта задача сводится к отысканию наименьшего внешне устойчивого множества в графе с 64 вершинами (клетки доски), у которого $(x, y) \in U$ тогда и только тогда, когда клетки x и y расположены на одной и той же горизонтали, вертикали или диагонали.

Число внешней устойчивости $\beta = 5$ для ферзей, $\beta = 8$ для ладей, $\beta = 12$ для коней, $\beta = 8$ для слонов (см. рис. 4—10).

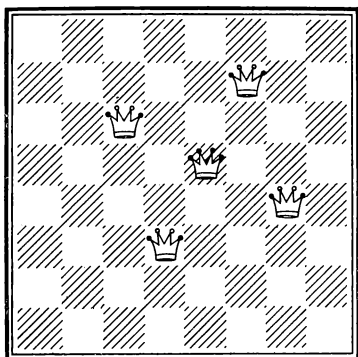
Пример 3. Задача о шести красных дисках.

Любителям французских ярмарок хорошо известна следующая игра: большой белый диск (радиус которого примем за единицу) лежит на столе; требуется полностью покрыть его шестью маленькими красными дисками (радиуса $\rho < 1$), которые последовательно

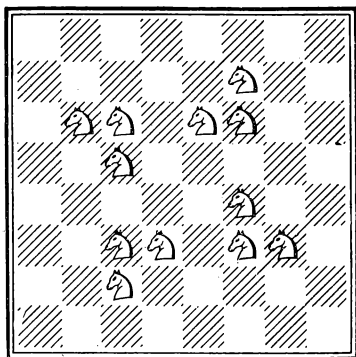
¹⁾ Считая, что клетка, занимаемая фигурой, тоже находится под ее ударом — *Прим. перев.*

кладут на стол, а положив, более уже не перемещают. При каком наименьшем радиусе ρ это возможно?

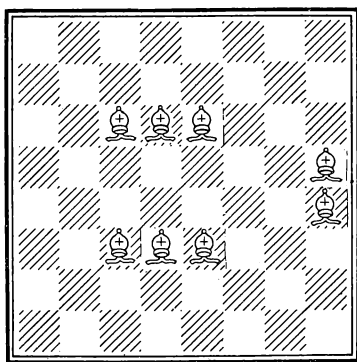
Задача сводится к нахождению наименьшего внешне устойчивого множества T для бесконечного графа (X, U) , где X — множество точек белого диска, а $(x, y) \in U$, когда расстояние $d(x, y)$ между x и y не превышает ρ .



$$\beta(G_1) = 5$$



$$\beta(G_2) = 12$$



$$\beta(G_3) = 8$$

Р и с. 4—10.

Для отыскания наибольшего внутренне устойчивого множества или наименьшего внешне устойчивого множества можно последовательно рассматривать каждое множество $T \subset X$ и проверять, удовлетворяет ли оно всем требуемым условиям. Конечно, в общем случае этот метод исключения практически недоступен, и надо прибегнуть к какому-либо *алгоритму*, т. е. к сокращенному способу таких вычислений (иногда предполагается использование быстродействующих электронных вычислительных машин),

Ниже мы изложим такой алгоритм для определения наибольшего внутренне устойчивого множества, непосредственно вытекающий из дальнейших теорий (гл. 10 для бихроматических графов, гл. 18 для общего случая). Так, например, решить задачу о восьми ферзях при наличии хорошего алгоритма можно менее чем за три минуты, в то время как способ исключений потребует десятка часов; кроме того, следует заметить, что для конкретной расстановки невозможность увеличения числа ферзей доказывается весьма простым рассуждением; в более общем случае тоже нужен простой критерий для проверки, является ли внутренне устойчивое множество наибольшим, и только хорошо задуманный алгоритм может нас удовлетворить.

Нахождение наименьшего внешне устойчивого множества представляет собой более элементарную задачу, которую можно решать следующим образом,

Алгоритм для нахождения наименьшего внешне устойчивого множества. Рассмотрим для примера граф $G = (X, \Gamma)$, изображенный на рис. 4—11, и определим отображение Δ множества $X = \{a, b, \dots\}$ в новое множество

$$\bar{X} = \{\bar{a}, \bar{b}, \dots\}$$

следующим образом:

$$\bar{y} \in \Delta x \iff y = x \text{ или } y \in \Gamma^{-1}x.$$

Тем самым построен так называемый простой граф¹⁾, который мы обозначим через (X, \bar{X}, Δ) (рис. 4—12); если T —внешне устойчивое множество графа G , то $\Delta T = \bar{X}$; наоборот, если $\Delta T = \bar{X}$, то множество T внешне устойчиво в G . Задача свелась, таким образом, к определению наименьшего множества $T \subset X$, для которого $\Delta T = \bar{X}$.

1° Удаляем из простого графа каждую такую вершину x , что $\Delta x \subset \Delta y$ для некоторой вершины $y \neq x$ (в самом деле, с точки зрения нашей задачи вершина y будет полностью заменять вершину x). В нашем примере мы удаляем, таким образом, вершины c, d, f .

2° Если в простом графе имеется висячее ребро (x, \bar{y}) , то, очевидно, $x \in T$. В данном примере множеству T заведомо принадлежит вершина a .

3° Исклучим из простого графа вершину a , уже входящую в T , и множество $\Delta a = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$; в результате получается граф, изображенный на рис. 4—13.

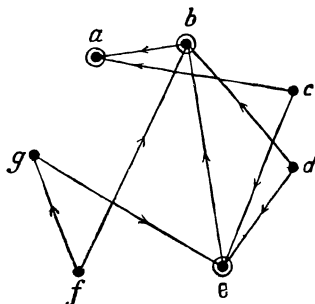
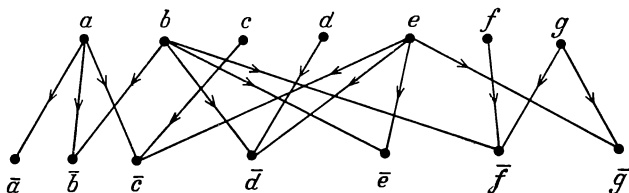


Рис. 4—11.

¹⁾ Общее определение простого графа, в данный момент не нужное, дается в гл. 10. — *Прим. перев.*

4° Снова пытаемся удалить некоторую вершину, как в 1°, или исключить вершину, заведомо принадлежащую T , как в 2°; если

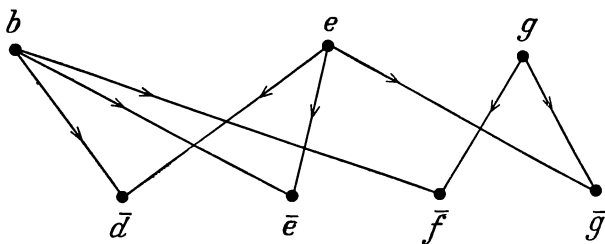


Р и с. 4—12.

упростить граф уже нельзя (как в данном примере), то назовем его неприводимым. Временно отнесем в T произвольную вершину, скажем b .

5° Исклучим, как в 3°, вершину b и множество $\Delta b = \{\bar{d}, \bar{e}, \bar{f}\}$.

6° Продолжаем упрощение, как выше: из полученного графа можно исключить вершину g , так как $\Delta g \subset \Delta e = \{\bar{g}\}$. Включая в T последнюю вершину e , получаем решение $T = \{a, b, e\}$.



Р и с. 4—13.

Если в 4° попробовать вместо b включить в T вершину g или e , то результат не улучшится; поэтому найденное в 6° решение удовлетворяет поставленным условиям.

ГЛАВА 5

Ядра графа

Теоремы существования и единственности

Пусть $G = (X, \Gamma)$ — конечный или бесконечный граф. Множество $S \subset X$ называется *ядром* графа, если S устойчиво как внутренне, так и внешне, т. е. если

$$(1) \quad x \in S \Rightarrow \Gamma x \cap S = \emptyset,$$

$$(2) \quad x \notin S \Rightarrow \Gamma x \cap S \neq \emptyset.$$

Из условия (1) вытекает, что ядро S не содержит петель, из условия (2) — что S содержит все такие вершины x , для которых $\Gamma x = \emptyset$; очевидно, пустое множество \emptyset не может быть ядром.

Пример 1 (фон Нейман — Моргенштерн [3]). Понятие ядра первоначально было введено в теории игр под названием „решения“.

Пусть имеется n игроков (1), (2), ..., (n), которые могут советоваться при выборе ситуации x из множества X ; если игрок (i) предпочитает ситуацию a ситуации b , то пишем $a \geq^i b$, и ясно, что \geq^i есть тотальный квазипорядок (пример 3 гл. 2). Так как отдельные предпочтения \geq^i могут не быть совместимы, то приходится вводить понятие *эффективного предпочтения* \succ . Если ситуация a эффективно предпочитается ситуации b , то это означает, что существует множество игроков, которые, считая a лучше b , имеют возможность добиться того, чтобы удобная им точка зрения одержала верх; в этом случае пишем $a \succ b$. Если, кроме того, $b \succ c$, то существует множество игроков, способных сделать так, чтобы одержала верх ситуация b ; но так как второе множество не обязательно совпадает с первым, то может не быть $a \succ c$: отношение \succ не транзитивно!¹⁾

Теперь рассмотрим граф (X, Γ) , где Γx означает множество ситуаций, эффективно предпочитаемых ситуации x . Пусть S — ядро графа (если оно существует); фон Нейман и Моргенштерн предлагают

¹⁾ Термином *эффективное предпочтение* мы обязаны Гильбо, изложившему [2] на основе этого термина; фон Нейман и Моргенштерн пользовались понятием доминирования. О различных математических формулировках эффективного предпочтения см. Берж [1], гл. V.

ограничивать игру элементами S . Внутренняя устойчивость S выражает тот факт, что никакая ситуация из S не может эффективно предпочитаться какой-либо другой ситуации из S , а это обеспечивает известную сплоченность; внешняя устойчивость означает, что любой ситуации x не из S эффективно предпочитается некоторая ситуация из S , в силу чего ситуация x сразу же отвергается.

Пример 2. Рассмотрим некоторый граф (X, Γ) , допускающий функцию Гранди $g(x)$; множество $S = \{x/g(x) = 0\}$ служит ядром этого графа, так как

- (1) $x \in S \Rightarrow \Gamma x \cap S = \emptyset$;
 (2) $x \notin S \Rightarrow g(x) \neq 0$, значит $\Gamma x \cap S \neq \emptyset$.

Пример 3. Не всякий граф обладает ядром: в этом читатель может самостоятельно убедиться на примере графа, изображенного на

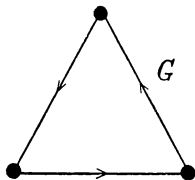


Рис. 5—1.

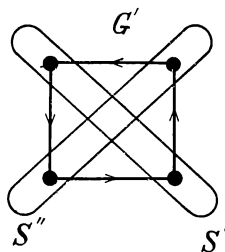


Рис. 5—2.

рис. 5—1; если граф имеет ядро S_0 , то его числа устойчивости удовлетворяют условию

$$\alpha(G) = \max_{S \in \mathcal{S}} |S| \geq |S_0| \geq \min_{T \in \mathcal{J}} |T| = \beta(G).$$

У графа G , изображенного на рис. 5—1, нет ядра, поскольку

$$\alpha(G) = 1 < 2 = \beta(G).$$

Напротив, у графа G' , изображенного на рис. 5—2, есть два ядра: S' и S'' .

Предложим теперь критерии, позволяющие узнавать, имеет ли граф ядро и является ли оно единственным.

Теорема 1. Если S — ядро графа (X, Γ) , то множество S — максимальное в семействе \mathcal{S} внутренне устойчивых множеств, т. е.

$$A \in \mathcal{S}, \quad A \supset S \Rightarrow A = S.$$

Пусть A — внутренне устойчивое множество, содержащее ядро S ; предположим, что A строго содержит S , и покажем, что это при-

водит к противоречию. В самом деле, тогда существовала бы такая вершина a , что $a \in A$, $a \notin S$, откуда $\Gamma a \cap S \neq \emptyset$ и, значит, $\Gamma a \cap A \neq \emptyset$ в противоречии с условием $A \in \mathbb{S}$.

Теорема 2. *В симметрическом графе без петель каждое максимальное множество семейства \mathbb{S} внутренне устойчивых множеств представляет собой ядро.*

Пусть S — максимальное множество из \mathbb{S} ; надо показать, что для любой вершины $x \notin S$ имеет место $\Gamma x \cap S \neq \emptyset$. В самом деле, если $\Gamma x \cap S \neq \emptyset$ для некоторой вершины $x \in S$, то множество $A = S \cup \{x\}$ внутренне устойчиво (поскольку $x \notin \Gamma x$) и в то же время $A \supset S$, $A \neq S$, что противоречит предположению о максимальнойности S в \mathbb{S} .

Следствие. *Симметрический граф без петель обладает ядром.*

В самом деле, образуем вспомогательный граф $(\mathbb{S}, \bar{\Gamma})$, вершинами которого служат внутренне устойчивые множества данного симметрического графа, а $S \in \bar{\Gamma} S'$ тогда и только тогда, когда $S \supset S'$. Вспомогательный граф — индуктивный, следовательно, по лемме Цорна (гл. 3) существует вершина $S \in \mathbb{S}$ без строго последующих. Множество S является максимальным внутренне устойчивым и, значит, в силу теоремы 2, ядром.

В случае когда данный симметрический граф конечен, это следствие становится очевидным и процесс нахождения ядра состоит в следующем.

Берем произвольную вершину x_0 и полагаем $S_0 = \{x_0\}$; затем берем некоторую вершину $x_1 \notin \Gamma S_0$ и полагаем $S_1 = \{x_0, x_1\}$; далее берем вершину $x_2 \notin \Gamma S_1 \dots$ и т. д. Так как граф конечен, то рано или поздно мы получим $\Gamma S_n = X$, и S_n , как максимальное множество в \mathbb{S} , будет ядром.

Характеристической функцией $\varphi_S(x)$ множества S называется функция

$$\varphi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in S, \\ 0 & \text{при } x \notin S. \end{cases}$$

Если $\Gamma x = \emptyset$, то условимся считать, что

$$\max_{y \in \Gamma x} \varphi_S(y) = 0.$$

Теорема 3. *Для того чтобы множество S было ядром, необходимо и достаточно, чтобы для характеристической функции $\varphi_S(x)$ выполнялось соотношение*

$$\varphi_S(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma x} \varphi_S(y).$$

1° Пусть S — ядро. В силу внутренней устойчивости

$$\varphi_S(x) = 1 \Rightarrow x \in S \Rightarrow \max_{y \in \Gamma x} \varphi_S(y) = 0.$$

В силу внешней устойчивости

$$\varphi_S(x) = 0 \Rightarrow x \notin S \Rightarrow \max_{y \in \Gamma x} \varphi_S(y) = 1.$$

Отсюда получается требуемое соотношение.

2° Пусть $\varphi_S(x)$ — характеристическая функция некоторого множества S ; если рассматриваемое соотношение выполнено, то

$$x \in S \Rightarrow \varphi_S(x) = 1 \Rightarrow \max_{y \in \Gamma x} \varphi_S(y) = 0 \Rightarrow \Gamma x \cap S = \emptyset,$$

$$x \notin S \Rightarrow \varphi_S(x) = 0 \Rightarrow \max_{y \in \Gamma x} \varphi_S(y) = 1 \Rightarrow \Gamma x \cap S \neq \emptyset.$$

Следовательно, S — ядро.

Теорема 4. *Прогрессивно конечный граф обладает ядром.*

Доказательство получается сразу, если заметить, что характеристическая функция $\varphi_S(x)$, удовлетворяющая соотношению предыдущей теоремы, по индукции определяется на множествах:

$$X(0) = \{x/\Gamma x = \emptyset\},$$

$$X(1) = \{x/\Gamma x \subset X(0)\},$$

$$X(2) = \{x/\Gamma x \subset X(1)\},$$

$$\dots$$

Теорема 4 (гл. 3) показывает, что таким путем φ_S будет определена на всем X .

Теорема Ричардсона. *Конечный граф, не содержащий контуров нечетной длины, обладает ядром.*

Пусть (X, Γ) — конечный граф без нечетных контуров; будем последовательно определять множества $Y_0, Y_1, Y_2, \dots \subset X$ следующим образом.

1° Берем $Y_0 = \emptyset$; обозначим через B_0 базу (см. гл. 2) подграфа, порождаемого множеством $X \setminus Y_0$; эта база существует в силу теоремы 1 (гл. 2). Полагаем $Y_1 = B_0 \cup \Gamma^{-1}B_0$.

2° Если множество Y_n уже определено, то обозначим через B_n какую-либо базу подграфа, порождаемого множеством $X \setminus Y_n$, удовлетворяющую условию $B_n \subset \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}B_{n-1} \setminus Y_{n-1})$. Легко видеть,

что такая база всегда существует¹⁾; далее полагаем

$$Y_{n+1} = Y_n \cup B_n \cup \Gamma^{-1}B_n.$$

Тогда

$$\emptyset = Y_0 \subset \subset Y_1 \subset \subset Y_2 \subset \subset \dots$$

Так как граф предполагается конечным, то существует такой номер m , что $Y_m = X$; пусть

$$S = \bigcup_{n=0}^{m-1} B_n.$$

Покажем, что S — ядро графа (X, Γ) .

1° S внешне устойчиво, ибо если $x \notin S$, то $x \in \Gamma^{-1}B_k \setminus Y_k$ для некоторого номера k , значит $\Gamma x \cap B_k \neq \emptyset$ и $\Gamma x \cap S \neq \emptyset$.

2° S внутренне устойчиво. В самом деле, никакие два элемента из B_n не могут быть смежны (ибо B_n является базой некоторого подграфа); рассмотрим две смежные вершины, одна из которых $\in B_n$, другая $\in B_p$, где $p < n$ (если такие вершины есть). Имеем $B_n \cap \Gamma^{-1}B_p = \emptyset$, ибо $\Gamma^{-1}B_p \subset Y_{p+1}$ и $B_n \subset X \setminus Y_n \subset X \setminus Y_{p+1}$. Точно так же $B_p \cap \Gamma^{-1}B_n = \emptyset$, так как в противном случае можно было бы

1) Для доказательства того, что граф $(X \setminus Y_n, \Gamma_X \setminus Y_n)$ имеет базу

$$B_n \subset \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}B_{n-1} \setminus Y_{n-1}),$$

рассмотрим какую-нибудь базу B'_n и вершину a_0 без строго последующих, выбранную для построения B'_n в соответствии с теоремой 3 (гл. 2); достаточно показать, что в $X \setminus Y_n$ найдется вершина b , которой можно заменить вершину a_0 и для которой

(1) $b \overset{n}{\geq} a_0$ (где $\overset{n}{\geq}$ — отношение квазипорядка в графе, порожденном множеством $X \setminus Y_n$),

(2) $b \in \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}B_{n-1} \setminus Y_{n-1})$.

В графе $(X \setminus Y_{n-1}, \Gamma_X \setminus Y_{n-1})$ существует путь $\mu = [a_0, a_1, \dots, b']$, ведущий из a_0 в B_{n-1} ; пусть a_k — первая вершина пути μ , принадлежащая Y_n . Так как $a_k \in X \setminus Y_{n-1}$, $a_k \in Y_n$, $a_k \notin B_{n-1}$, то $a_k \in \Gamma^{-1}B_{n-1} \setminus Y_{n-1}$. (Предполагается, что множество Y_n определено по формуле $Y_n = Y_{n-1} \cup B_{n-1} \cup B_{n-1}$. Если бы $a_k \in B_{n-1}$, то вершина a_{k-1} принадлежала бы $\Gamma^{-1}B_{n-1} \subset Y_n$ и, таким образом, a_k не была бы первой вершиной пути μ , принадлежащей Y_n . Следовательно, $a_k \notin B_{n-1}$; а так как $a_k \notin Y_{n-1}$, то $a_k \in \Gamma^{-1}B_{n-1} \setminus Y_{n-1}$. — *Прим. ред.*) Вершина $b = a_{k-1}$ удовлетворяет как условию (1), так и условию (2).)

Обобщение 2. Локально конечный граф $G = (X, \Gamma)$, не содержащий контуров нечетной длины, имеет ядро.

Это следует из теоремы Радо (гл. 3)¹⁾.

Приложение к функциям Гранди

Условия существования, установленные для ядер, можно распространить на функции Гранди благодаря следующим результатам.

Теорема 5. Если каждый подграф графа (X, Γ) обладает ядром, то граф (X, Γ) допускает функцию Гранди.

В самом деле, пусть S_0 — ядро графа (X, Γ) , далее, S_1 — ядро подграфа, порожденного множеством $X_1 = X \setminus S_0$, затем S_2 — ядро подграфа, порожденного множеством $X_2 = X_1 \setminus S_1$, и т. д. ...; вообще положим $X_\alpha = X_{\alpha-1} \setminus S_{\alpha-1}$, если α — порядковое число первого рода; $X_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} X_\beta$, если α — порядковое число второго рода (заметим, что $\beta > \alpha$ влечет $X_\alpha \supset X_\beta$, и в силу принципа индукции существует порядковое число γ , при котором $X_\gamma = \emptyset$).

Множества S_α образуют разбиение X , и каждой вершине x мы отнесем порядковое число $g(x)$ следующим образом:

$$g(x) = \alpha \iff x \in S_\alpha.$$

1) В самом деле, пусть (A, Γ_A) — произвольный конечный подграф G ; в силу теоремы Ричардсона, он имеет ядро S_A . Положим $E_0 = \{0, 1\}$, $E(\emptyset) = E(\{0\}) = \{1\}$, $E(\{1\}) = E(\{0, 1\}) = \{0\}$. Функция

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in S_A \\ 0 & \text{при } x \notin S_A \end{cases}$$

удовлетворяет условию теоремы Радо, ибо если $x \in S_A$, то $\varphi_A(x) = 1$, $\varphi_A(\Gamma_A x) = \{0\}$ или \emptyset , $E(\varphi_A(\Gamma_A x)) = \{1\}$, а если $x \notin S_A$, то $\varphi_A(x) = 0$, $\varphi_A(\Gamma_A x) = \{1\}$ или $\{0, 1\}$, $E(\varphi_A(\Gamma_A x)) = \{0\}$ и в обоих случаях $\varphi_A(x) \in E(\varphi_A(\Gamma_A x))$. По теореме Радо существует функция $\varphi(x)$, определенная на всем X и такая, что $\varphi(x) \in E(\varphi(\Gamma x))$. Тогда множество

$$S = \{x/x \in X, \varphi(x) = 1\}$$

является ядром G , так как

$$x \in S \Rightarrow \varphi(x) = 1 \Rightarrow E(\varphi(\Gamma x)) \ni 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(\Gamma x) \not\ni 1 \Rightarrow \Gamma x \cap S = \emptyset,$$

$$x \notin S \Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow E(\varphi(\Gamma x)) \ni 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(\Gamma x) \ni 1 \Rightarrow \Gamma x \cap S \neq \emptyset. \text{ — Прим. перев.}$$

Покажем, что $g(x)$ — функция Гранди.

(1) Пусть $g(x) = \alpha$; покажем, что для любого $\beta < \alpha$ найдется вершина $y \in \Gamma x$, удовлетворяющая условию $g(y) = \beta$.

Так как $x \in S_\alpha$ и $\alpha > \beta$, то $x \in X_\alpha \subset X_\beta$, $x \notin S_\beta$. Так как S_β — внешне устойчивое множество подграфа, порожденного множеством X_β , то в S_β существует вершина $y \in \Gamma x$; иначе говоря, в Γx есть такая вершина y , что $g(y) = \beta$.

(2) Пусть $g(x) = \alpha$; в Γx не существует такой вершины y , что $g(y) = \alpha$, ибо иначе множество S_α не было бы внутренне устойчивым.

Условия (1) и (2) вместе выражают, что $g(x)$ есть функция Гранди.

Следствие 1. Симметрический граф допускает функцию Гранди в том и только том случае, если он не имеет петель.

(Ясно, что граф с петлей не может допускать функций Гранди.)

Следствие 2. Граф без контуров нечетной длины, являющийся или конечным, или локально конечным, или индуктивным, допускает функцию Гранди.

Замечание. Пусть графы G_1, G_2, \dots, G_n обладают ядрами; имеет ли ядро их сумма (или их произведение)? Безотказным оружием для определения ядра суммы графов служит понятие функции Гранди (впрочем, это мотивирует также важность понятия ядра для теории функций Гранди). Комбинируя теорему 8 (гл. 3) с теоремой 5 настоящей главы, мы видим, что если все подграфы графа G_i обладают ядрами (при всех i), то сумма

$$G_1 + G_2 + \dots + G_n$$

допускает функцию Гранди g , а значит, и ядро $S = \{x/g(x) = 0\}$.

В следующей главе мы познакомимся с применениями этого важного замечания.

ГЛАВА 6

Игры на графе

Игра Ним

Граф (X, Γ) дает возможность определить некоторую игру двух игроков, которых мы назовем (A) и (B) . Положениями этой игры служат вершины графа; начальная вершина x_0 выбирается жеребьевкой, и противники играют поочередно: сперва игрок (A) выбирает вершину x_1 в множестве Γx_0 , затем (B) выбирает вершину x_2 в множестве Γx_1 , после этого (A) опять выбирает вершину x_3 в Γx_2 , и т. д. Если один из игроков выбрал вершину x_k , для которой $\Gamma x_k = \emptyset$, то партия оканчивается; игрок, выбравший вершину последним, выиграл, а его противник проиграл. Ясно, что если граф не является прогрессивно конечным, то партия может никогда не окончиться.

В честь известного развлечения, которое здесь обобщено, будем описанную только что игру называть *игрой Ним*, а определяющий ее граф обозначать через (X, Γ) ; сейчас наша задача состоит в том, чтобы охарактеризовать выигрышные положения, т. е. те вершины графа, выбор которых обеспечивает выигрыш партии независимо от ответов противника. Главным результатом является следующая

Теорема 1. *Если граф имеет ядро S и если один из игроков выбрал вершину в ядре, то этот выбор обеспечивает ему выигрыш или ничью.*

Действительно, если игрок (A) выбрал вершину $x_1 \in S$, то либо $\Gamma x_1 = \emptyset$, и тогда он уже выиграл партию, либо его противник (B) вынужден выбрать вершину x_2 в $X \setminus S$, а значит, следующим ходом игрок (A) может выбрать x_3 опять в S и продолжать в том же духе. Если в какой-либо определенный момент один из игроков выиграл, выбрав вершину x_k , для которой $\Gamma x_k = \emptyset$, то $x_k \in S$ и выигравшим партнером необходимо является (A) .

Ч. И Т. Д.

Основной метод для хорошего игрока состоит, следовательно, в вычислении какой-либо функции Гранди, если она существует; с помощью этой функции $g(x)$ получаем ядро

$$S = \{x/g(x) = 0\}$$

рассматриваемого графа. Если начальная вершина x_0 такова, что $g(x_0) = 0$, то игрок (А) находится в критическом положении, ибо его противник может обеспечить себе выигрыш или ничью; напротив, если $g(x_0) \neq 0$, то игрок (А) сам обеспечивает себе выигрыш или ничью, выбирая такую вершину x_1 , что $g(x_1) = 0$.

Следствие. Если граф прогрессивно конечен, то существует одна и только одна функция Гранди $g(x)$; каждый выбор такой вершины y , для которой $g(y) = 0$, является выигрышным, а каждый выбор такой вершины z , что $g(z) \neq 0$, — проигрышным. (Непосредственно.)

Пример 1 [Айзекс (R. Isaacs)]. Пусть X — множество точек (p, q) декартовой плоскости, имеющих целые неотрицательные координаты p и q ; два партнера поочередно зачеркивают точки множества X ;

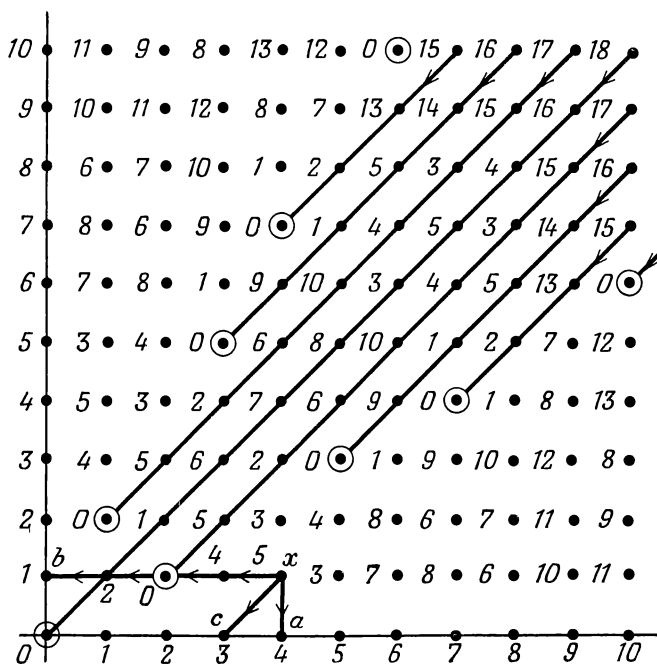


Рис. 6—1.

если x — последняя зачеркнутая точка, то игрок, которому нужно ходить, должен выбрать точку либо на одном из перпендикуляров xa или xb , опущенных из x на оси координат, либо же на отрезке xc биссектрисы угла axb , расположенном во внутренней области этого угла; например, после вершины $x = (4, 1)$ выбор должен быть сделан

из числа вершин $(4, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 1)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(3, 0)$. Игрок, который сумеет первым достигнуть вершины $(0, 0)$, выигрывает.

Граф (X, Γ) прогрессивно конечен и поэтому допускает функцию Гранди $g(x)$, значения которой в каждой вершине показаны на рис. 6—1; выигрышные выборы обведены кружком. Хотя последние образуют множество, симметричное относительно главной диагонали, в их расположении наблюдается нерегулярность.

Пример 2. Граф, изображенный на рис. 6—2, представляет игру Ним, для которой не существует ни функции Гранди, ни ядра; предыдущий метод поэтому здесь неприменим. Тем не менее каждый игрок может застраховать себя от проигрыша, ограничивая свой выбор одной из вершин a , b , c .

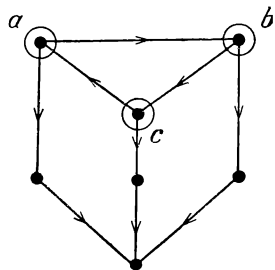


Рис. 6—2.

Рассмотрим теперь различные игры Ним (X_1, Γ_1) , (X_2, Γ_2) , ..., (X_n, Γ_n) и допустим, что два игрока хотят играть по очереди по следующему правилу: в очередной момент игры партнер, которому нужно ходить, выбирает одну из игр Ним и делает ход в этой игре, не трогая остальных; первый, кто совсем не сможет играть, проигрывает. Эта ситуация представляет собой игру Ним на графе, который есть не что иное, как сумма графов (X_i, Γ_i) (см. гл. 3); способ выигрыша дается следующим результатом.

Теорема 2. *Рассмотрим игры (X_1, Γ_1) , (X_2, Γ_2) , ..., (X_n, Γ_n) , допускающие соответственно функции Гранди g_1, g_2, \dots, g_n ; если играют в сумму этих игр, то выигрыш или ничья обеспечивается выбором таких положений*

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n,$$

для которых

$$g(x) = g_1(x_1) \dot{+} g_2(x_2) \dot{+} \dots \dot{+} g_n(x_n) = 0.$$

Это непосредственно вытекает из теоремы 8 (гл. 3).

Пример. Простая игра Ним, или Фан Тан. Два игрока поочередно берут спички из n кучек; игрок, которому нужно ходить, имеет право выбрать какую-нибудь кучку (не пустую) и взять из нее одну или несколько спичек. Тот, кто сумеет забрать последние спички, выигрывает.

Эта ситуация есть сумма игр (X_1, Γ_1) , (X_2, Γ_2) , ..., (X_n, Γ_n) ; в игре (X_k, Γ_k) любой элемент x_k из X_k выражает состояние k -й кучки, а $g_k(x_k)$ равно соответствующему числу спичек.

В силу теоремы 2 выбор является выигрышным тогда и только тогда, когда d -сумма количеств спичек, оставшихся в различных кучках, равна нулю.

Мы собираемся рассмотреть различные обобщения теоремы 2; прежде всего, если $p \leq n$ и если $(X_1, \Gamma_1), (X_2, \Gamma_2), \dots, (X_n, \Gamma_n)$ — данные игры Ним, то их сумма порядка p , по определению, есть игра Ним, в которой каждый игрок, имея перед собой все игры (X_i, Γ_i) , выбирает p из них и играет одновременно в эти p игр, не трогая остальных; сумма порядка n соответствует произведению графов, а сумма порядка 1 — сумме графов. Для выигрыша имеем следующий результат.

Теорема 3. Пусть игры Ним $(X_1, \Gamma_1), (X_2, \Gamma_2), \dots, (X_n, \Gamma_n)$ транзитивны (т. е. $\Gamma_k = \hat{\Gamma}_k$ для всех k), и пусть g_1, g_2, \dots, g_n — их функции Гранди (они всегда существуют); сумма порядка p этих n игр допускает функцию Гранди g , значение которой для $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ вычисляется следующим образом: найдем двоичные разложения

$$g_k(x_k) = (c_k^1, c_k^2, \dots)$$

и положим

$$g(x) = \left[\sum_{k=1}^n c_k^1 \right]_{(p+1)} + (p+1) \left[\sum_{k=1}^n c_k^2 \right]_{(p+1)} + (p+1)^2 \left[\sum_{k=1}^n c_k^3 \right]_{(p+1)} + \dots,$$

где $[t]_{(p+1)}$ означает остаток от деления t на $p+1$ („ t по модулю $p+1$ “).

Выбор x является выигрышным тогда и только тогда, когда $g(x) = 0$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8 (гл. 3)¹⁾.

Пример. Игры Ним порядка p (Мур [8]). Перед двумя игроками находятся n кучек спичек; пусть p — целое число $< n$; игрок, который должен сделать очередной ход, выбирает p кучек, а из каждой выбранной кучки вынимает одну или несколько спичек. Взявший последние спички выигрывает.

Чтобы узнать, является ли выбор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ выигрышным, надо сосчитать в двоичной системе количества спичек: $g_k(x_k) = (c_k^1, c_k^2, \dots)$ для k -й кучки — и проверить, что для каждого номера r

$$\left[\sum_{k=1}^n c_k^r \right]_{(p+1)} = 0.$$

¹⁾ Теорема 3 в том виде, как она сформулирована, неверна. В этом можно убедиться на простых примерах. — Прим. ред.

Рассмотрим теперь прогрессивно конечную игру Ним с функцией Гранди $g(x)$; предположим, что на X определена операция $\dot{+}$, т. е. закон, относящий каждой паре

$$(x, y) \in X \times X$$

некоторую вершину $z = x \dot{+} y$; если $S \subset X$, $T \subset X$, то положим

$$S \dot{+} T = \{s \dot{+} t / s \in S, t \in T\}.$$

Часто для выигрыша удается применить следующий результат.

Теорема 4 (Гранди). *Если прогрессивно конечный граф (X, Γ) снабжен операцией $\dot{+}$, удовлетворяющей условию*

$$\Gamma(x \dot{+} y) = (\Gamma x \dot{+} y) \cup (x \dot{+} \Gamma y),$$

то для его функции Гранди g при $z = x \dot{+} y$ имеет место формула

$$(1) \quad g(z) = g(x \dot{+} y) = g(x) \dot{+} g(y).$$

Мы докажем эту формулу с помощью индукции, выбирая последовательно точки $z = x \dot{+} y$ в множествах:

$$\begin{aligned} X(0) &= \{x / \Gamma x = \emptyset\}, \\ X(1) &= \{x / \Gamma x \subset X(0)\}, \\ X(2) &= \{x / \Gamma x \subset X(1)\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

При $z \in X(0)$ формула (1) верна потому, что

$$z \in X(0) \Rightarrow (\Gamma x \dot{+} y) \cup (x \dot{+} \Gamma y) = \Gamma z = \emptyset \Rightarrow x, \quad y \in X(0),$$

откуда

$$g(z) = 0 = 0 \dot{+} 0 = g(x) \dot{+} g(y).$$

Допустим теперь, что формула (1) уже доказана для всех z из $X(\alpha - 1)$, и покажем, что она остается справедливой для любой вершины $z = x \dot{+} y$ из $X(\alpha)$; если бы было не так, то выполнялось бы одно из двух неравенств:

$$g(z) > g(x) \dot{+} g(y),$$

$$g(z) < g(x) \dot{+} g(y).$$

1° Если $g(z) > g(x) \dot{+} g(y)$, то существует такая вершина $z_1 \in \Gamma z$, что

$$g(z_1) = g(x) \dot{+} g(y).$$

Можно написать (с точностью до перестановки x и y) $z_1 = x_1 \dot{+} y$, где $x_1 \in \Gamma x$; так как $z_1 \in \Gamma z \subset X(\alpha - 1)$, то

$$g(z_1) = g(x_1 \dot{+} y) = g(x_1) \dot{+} g(y).$$

Отсюда

$$g(x) \dot{+} g(y) = g(x_1) \dot{+} g(y).$$

Из этого, в силу теоремы 7 (гл. 3), вытекает, что $g(x) = g(x_1)$; но это невозможно, так как $x_1 \in \Gamma x$.

2° Если $g(z) < g(x) \dot{+} g(y)$, то можно определить [например, как в теореме 8 (гл. 3)] такое число γ , что

$$g(z) = \gamma \dot{+} g(y); \quad \gamma < g(x).$$

Так как в Γx существует вершина x_1 , для которой $\gamma = g(x_1)$, то, очевидно,

$$g(z) = g(x_1) \dot{+} g(y).$$

Так как $x_1 \dot{+} y \in \Gamma z \subset X(\alpha - 1)$, то

$$g(x_1 \dot{+} y) = g(x_1) \dot{+} g(y) = g(z).$$

Но это невозможно, поскольку $x_1 \dot{+} y \in \Gamma z$.

Пример. Два противника играют поочередно, выбирая кучку спичек среди n кучек и разделяя выбранную кучку на две неравные части; последний, кто еще имеет возможность это сделать, выигрывает.

Положение x задается количествами $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ спичек в кучках; положим

$$\begin{aligned} x \dot{+} y &= (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k) \dot{+} (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_l) = \\ &= (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_l). \end{aligned}$$

Операция $\dot{+}$ удовлетворяет условиям:

- (1) $\Gamma(x \dot{+} y) = (\Gamma x \dot{+} y) \cup (x \dot{+} \Gamma y)$ (основной закон);
- (2) $x \dot{+} y = y \dot{+} x$ (коммутативность);
- (3) $x \dot{+} (y \dot{+} z) = (x \dot{+} y) \dot{+} z$ (ассоциативность);
- (4) $x \dot{+} z = y \dot{+} z \Rightarrow x = y$;

(5) существует положение e (без спичек), такое, что $x \dot{+} e = x$ для всех x .

Вершина z называется *неприводимой*, если невозможно написать $z = x \dot{+} y$, $x \neq e$, $y \neq e$; неприводимым вершинам здесь отвечают конфигурации вида $z = (\bar{x}_1)$ с одной-единственной кучкой. Имеем:

$$\begin{aligned} g(x) &= g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k) = g((\bar{x}_1) \dot{+} (\bar{x}_2) \dot{+} \dots \dot{+} (\bar{x}_k)) = \\ &= g(\bar{x}_1) \dot{+} g(\bar{x}_2) \dot{+} \dots \dot{+} g(\bar{x}_k). \end{aligned}$$

Поэтому достаточно располагать значениями g для неприводимых положений, чтобы сразу, простым d -сложением, найти остальные значения. Непосредственно получаем

$\bar{x}_1 =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$g(\bar{x}_1) =$	0	0	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	3	2	1	3	2	4	3	0

В более общем случае прогрессивно конечной игры, в которой существует единственная такая вершина e , что $\Gamma e = \emptyset$, а операция \dagger удовлетворяет условиям (1), (2), (3), (4), (5), Адамс и Бенсон [1] доказали, что *каждое положение разлагается в конечную сумму неприводимых положений, причем это разложение единственно*

Общее определение игры (с полной информацией)

Общее определение игры, весьма простое для ограниченных партий, требует большой осторожности в случае отказа от этого условия. *Игрок* — это лицо, с которым связан один из эпитетов: *активный* или *пассивный*; для двух игроков (A) и (B) игра определяется:

1° множеством X , элементы которого называются *положениями* *игры*;

2° многозначным отображением Γ множества X в себя, называемым *правилом* *игры*;

3° однозначным отображением θ множества X в множество $\{0, 1, 2\}$, называемым *ходом*; предполагается, что $\theta(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Gamma x = \emptyset$; при $\theta(x) = 1$ говорят, что в положении x *очередной ход должен сделать игрок (A)*, а при $\theta(x) = 2$ — что *ход игрока (B)*;

4° двумя вещественными функциями $f(x)$ и $g(x)$, определенными и ограниченными на X , называемыми *функциями предпочтения* соответственно для игроков (A) и (B).

Партия осуществляется следующим образом: начальное положение $x_0 \in X$ выбирается по жребию; если, например, $\theta(x_0) = 1$, то игрок (A), которому нужно сделать ход, должен выбрать положение x_1 в множестве Γx_0 ; в свою очередь, игрок, который должен сделать следующий ход [т. е. (A), если $\theta(x_1) = 1$, или (B), если $\theta(x_1) = 2$], выбирает положение x_2 в множестве Γx_1 , и так далее. Если один из игроков выбрал такое положение x_k , для которого $\Gamma x_k = \emptyset$, то партия окончена (разумеется, партия может и никогда не окончиться). Если $S \subset X$ — множество положений, встретившихся

в течение партии, то выигрыш игрока (A), по определению, есть

$$f(S) = \sup_{y \in S} f(y), \quad \text{если игрок } (A) \text{ активный;}$$

$$f(S) = \inf_{y \in S} f(y), \quad \text{если игрок } (A) \text{ пассивный.}$$

Аналогично, посредством функции g , определяется выигрыш игрока (B). Цель игрока (A) состоит в получении возможно большего выигрыша; обычно $|f(S)|$ выражается денежной суммой, которую (A) должен получить в случае $f(S) \geq 0$ и уплатить в случае $f(S) \leq 0$.

Положим $X_A = \{x/\theta(x) = 1\}$, $X_B = \{x/\theta(x) = 2\}$; надо отметить, что игра — это не что иное, как граф (X, Γ) , снабженный в каждой вершине x вектором $(\theta(x), f(x), g(x))$.

Подграф графа (X, Γ) определяет *подигру*, а частичный граф — *частичную игру*; заметим, что при вышеуказанных определениях каждая подигра и каждая частичная игра сами являются играми (это неверно при других, более обычных определениях); игра представляет собой в точности „структуру“, заданную на абстрактном множестве X .

ПРИМЕР 1. Игра Ним. В случае игры Ним на графе $(\bar{X}, \bar{\Gamma})$ *положение игры* есть пара (\bar{x}, i) , где $\bar{x} \in \bar{X}$, а i равно 1 или 2, смотря по тому, сделан последний ход игроком (B) или игроком (A); имеем:

$$\theta(\bar{x}, i) = i, \quad \text{если } \bar{\Gamma}\bar{x} \neq \emptyset;$$

$$\theta(\bar{x}, i) = 0, \quad \text{если } \bar{\Gamma}\bar{x} = \emptyset;$$

$$\Gamma(\bar{x}, 1) = \bar{\Gamma}\bar{x} \times \{2\};$$

$$\Gamma(\bar{x}, 2) = \bar{\Gamma}\bar{x} \times \{1\}.$$

Если $\bar{\Gamma}\bar{x} = \emptyset$, то

$$f(\bar{x}, 2) = g(\bar{x}, 1) = 1.$$

Во всех остальных случаях $f(x) = g(x) = 0$; оба игрока активны.

ПРИМЕР 2. Шахматы. Два игрока (A) и (B) играют соответственно „белыми“ и „черными“; *положение* $x = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, i)$ представляется клетками $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots$ шахматной доски, на которых расположены различные фигуры, и индексом i , равным 1 или 2, — *теоретическим ходом* в положении x ; $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots)$ называется также *диаграммой* положения x .

Игрок (A) активен; $f(x) = 1$, когда x — матовое положение для черных, во всех же остальных случаях $f(x) = 0$.

Пример 3. *Погоня* [2]. На поверхности \bar{S} („море“) одна из двух лодок преследует другую; эту ситуацию можно уподобить игре, в которой два игрока (A) и (B) ходят поочередно, например каждую секунду, перемещая свои лодки. Если \bar{x}_1 — точка моря \bar{S} , в которой находится преследующая лодка, а \bar{x}_2 — точка, где находится преследуемая лодка, и если i — теоретический ход, то положением игры будет $x = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, i)$. Пусть $\bar{B}_i(\bar{x}_i) \subset \bar{S}$ — „круг“ с центром \bar{x}_i , имеющий своим радиусом наибольшее расстояние, которое может проплыть лодка \bar{x}_i за одну секунду; имеем:

$$\Gamma(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 1) = \bar{B}_1(\bar{x}_1) \times \{\bar{x}_2\} \times \{2\},$$

$$\Gamma(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 2) = \{\bar{x}_1\} \times \bar{B}_2(\bar{x}_2) \times \{1\}.$$

Обозначим через $d(\bar{x}, \bar{y})$ расстояние между точками \bar{x} и \bar{y} ; если целью преследователя является возможно большее приближение к преследуемому, то игрок (A) — активный и

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, i) = -d(\bar{x}_1, \bar{x}_2).$$

Если цель преследователя состоит в том, чтобы обязательно настигнуть преследуемого, то (A) активен и

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, i) = 1 \quad \text{при} \quad \bar{x}_1 = \bar{x}_2,$$

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, i) = 0 \quad \text{при} \quad \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2.$$

Если цель преследуемого — не дать себя настигнуть, то игрок (B) — пассивный и

$$g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, i) = 1 \quad \text{при} \quad \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2,$$

$$g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, i) = 0 \quad \text{при} \quad \bar{x}_1 = \bar{x}_2.$$

В нашем случае цель игрока (A) существенно *активна*, в то время как цель игрока (B) существенно *пассивна*. *Подигра* получится, если запретить некоторые области моря \bar{S} для одной из лодок; *частичная игра* получится, если уменьшить максимальную скорость какой-либо из лодок.

Стратегии

В игре $(X, \Gamma, \theta, f, g)$ стратегия игрока (A) есть, по определению, такое однозначное отображение σ множества X_A в X , что

$$\sigma x \in \Gamma x \quad (x \in X_A).$$

Игрок (A) *придерживается* стратегии σ , если он а priori решает: „в каждом положении x , в котором ход мой, я буду в течение всей партии выбирать положение σx “. Множество всех возможных стратегий σ игрока (A) обозначается символом Σ_A .

Если начальное положение x_0 фиксировано и если игроки (A) и (B) придерживаются соответственно стратегий σ и τ , то партия полностью определена и мы обозначим через $\langle x_0; \sigma, \tau \rangle$ множество встречающихся в ней положений; выигрыш игрока (A) в таком случае равен

$f(x_0; \sigma, \tau) = \sup \{f(x) / x \in \langle x_0; \sigma, \tau \rangle\}$, если игрок (A) активен;

$f(x_0; \sigma, \tau) = \inf \{f(x) / x \in \langle x_0; \sigma, \tau \rangle\}$, если игрок (A) пассивен.

Пара (σ_0, τ_0) , по определению, есть *равновесие* (для положения x), если

$$f(x; \sigma, \tau_0) \leq f(x; \sigma_0, \tau_0) \quad (\sigma \in \Sigma_A),$$

$$g(x; \sigma_0, \tau) \leq g(x; \sigma_0, \tau_0) \quad (\tau \in \Sigma_B).$$

Иначе говоря, если перед началом партии игроки договорятся придерживаться стратегий σ_0 и τ_0 , то такое решение будет обладать определенной устойчивостью: игрок, который попытается изменить свою стратегию в ходе партии, будет „наказан“ за это уменьшением выигрыша.

Пара (σ_0, τ_0) , являющаяся равновесием для любого положения x , называется *абсолютным равновесием* игры; обобщая теорему существования ядра у прогрессивно конечного графа, получаем следующий основной результат.

Теорема Цермело — фон Неймана¹⁾. Если граф (X, Γ) некоторой игры прогрессивно конечен, а множества $f(X) = \{f(x) / x \in X\}$ и $g(X)$ конечны, то игра допускает абсолютное равновесие (σ_0, τ_0) .

Как и в предыдущей главе, последовательно определяем множества $X(\alpha)$, полагая

$$X(0) = \{x / \Gamma x = \emptyset\};$$

$X(\alpha) = \{x / \Gamma x \subset X(\alpha - 1)\}$, если α — порядковое число первого рода;

$$X(\alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} X(\beta), \text{ если } \alpha \text{ — порядковое число второго рода.}$$

Так как граф прогрессивно конечен, то, в силу теоремы 4 (гл. 3), существует порядковое число γ , такое, что $X = X(\gamma)$; будем последовательно определять равновесие (σ_0, τ_0) для всех $X(\alpha)$.

¹⁾ Эта теорема была открыта Цермело (E. Zermelo) для шахмат и почти одновременно распространена Калмаром (F. Kalmar) и фон Нейманом на игры с платежами (где выигрыш игрока является проигрышем его противника). Затем Кун (W. H. Kuhn) перенес ее на игры, в которых интересы игроков не обязательно противоположны; в [2] дается ее обобщение на случаи игр с неограниченной продолжительностью и таких игр, в которых имеется много способов достижения одного положения из другого. Здесь мы приводим наиболее общую формулировку.

В $X(0)$ отображение σ_0 не обязано быть определено, однако мы положим

$$\sigma_0 x = x \quad (x \in X(0)).$$

Если α — порядковое число первого рода, а равновесие (σ_0, τ_0) уже определено в $X(\alpha - 1)$, то определяем равновесие $(\bar{\sigma}_0, \bar{\tau}_0)$ в $X(\alpha)$ следующим образом¹⁾: пусть $x \in X_A$, тогда

1° в случае $x \in X(\alpha - 1)$ полагаем $\bar{\sigma}_0 x = \sigma_0 x$;

2° в случае $x \in X(\alpha) \setminus X(\alpha - 1)$ полагаем $\bar{\sigma}_0 x = y$, где $y \in \Gamma x$, и

$$f(y; \sigma_0, \tau_0) = \max_{z \in \Gamma x} f(z; \sigma_0, \tau_0).$$

Очевидно, (σ_0, τ_0) есть равновесие для подигры, порожденной множеством $X(0)$; допустим теперь, что (σ_0, τ_0) — равновесие для подигры, порожденной множеством $X(\alpha - 1)$, и покажем, что тогда $(\bar{\sigma}_0, \bar{\tau}_0)$ является равновесием для подигры, порожденной $X(\alpha)$, т. е.

$$(1) \quad f(x; \bar{\sigma}, \bar{\tau}_0) \leq f(x; \bar{\sigma}_0, \bar{\tau}_0) \quad (\bar{\sigma} \in \Sigma_A, x \in X(\alpha));$$

$$(1') \quad g(x; \bar{\sigma}_0, \bar{\tau}) \leq g(x; \bar{\sigma}_0, \bar{\tau}_0) \quad (\bar{\tau} \in \Sigma_B, x \in X(\alpha));$$

так как предполагается, что неравенства (1) и (1') уже выполнены для $x \in X(\alpha - 1)$, то можно считать, что $x \in X(\alpha) \setminus X(\alpha - 1)$.

Если $x \in X_A$, то пусть $\bar{\sigma}x = z$; ввиду того, что $z \in X(\alpha - 1)$, имеем

$$f(z; \sigma, \tau_0) \leq f(z; \sigma_0, \tau_0) \leq f(y; \sigma_0, \tau_0).$$

Будем выводить неравенство (1) во всех возможных случаях:

1° если игрок (A) активен, а $f(x) \leq f(z; \sigma, \tau_0)$, то

$$f(x; \bar{\sigma}, \bar{\tau}_0) = f(z; \sigma, \tau_0) \leq f(y; \sigma_0, \tau_0) \leq f(x; \bar{\sigma}_0, \bar{\tau}_0);$$

2° если игрок (A) активен, а $f(x) \geq f(z; \sigma, \tau_0)$, то

$$f(x; \bar{\sigma}, \bar{\tau}_0) = f(x) \leq f(x; \bar{\sigma}_0, \bar{\tau}_0);$$

3° если игрок (A) пассивен, а $f(x) \leq f(y; \sigma_0, \tau_0)$, то

$$f(x; \bar{\sigma}, \bar{\tau}_0) \leq f(x) = f(x; \bar{\sigma}_0, \bar{\tau}_0);$$

4° если игрок (A) пассивен, а $f(x) \geq f(y; \sigma_0, \tau_0)$, то

$$f(x; \bar{\sigma}, \bar{\tau}_0) \leq f(z; \sigma, \tau_0) \leq f(y; \sigma_0, \tau_0) = f(x; \bar{\sigma}_0, \bar{\tau}_0).$$

Таким же путем, заменив f на g , докажем неравенство (1').

¹⁾ Случай, когда α — второго рода, тривиален: будучи определено на всех множествах расширяющейся последовательности, (σ_0, τ_0) тем самым определено и на их объединении. — *Прим. перев.*

Следствие 1. Если граф (X, Γ) некоторой игры прогрессивно конечен, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая пара (σ_0, τ_0) , что

$$f(x; \sigma, \tau_0) \leq f(x; \sigma_0, \tau_0) + \varepsilon \quad (x \in X, \sigma \in \Sigma_A);$$

$$g(x; \sigma_0, \tau) \leq g(x; \sigma_0, \tau_0) + \varepsilon \quad (x \in X, \tau \in \Sigma_B).$$

В самом деле, заменим функции предпочтения f и g такими функциями f' и g' , чтобы множества

$$f'(X) = \{f'(x)/x \in X\},$$

$$g'(X) = \{g'(x)/x \in X\}$$

были конечными и чтобы было

$$|f'(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (x \in X),$$

$$|g'(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (x \in X);$$

это всегда возможно, поскольку f и g предполагаются ограниченными на X . Так как существует равновесие с f' и g' , то будет существовать и ε -равновесие с f и g .

Следствие 2. Если граф (X, Γ) некоторой игры прогрессивно конечен, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие стратегии σ_0 и τ_0 , что

$$f(x_0; \sigma, \tau_0) - \varepsilon \leq f(x_0; \sigma_0, \tau_0) \leq f(x_0; \sigma_0, \tau) + \varepsilon$$

(каковы бы ни были $\sigma \in \Sigma_A, \tau \in \Sigma_B$).

Иными словами, в партии с начальным положением x_0 игрок (A) посредством стратегии σ_0 может гарантировать выигрыш $f(x_0, \sigma_0, \tau_0)$ (с точностью ε); с другой стороны, в силу первого неравенства, никакая другая стратегия σ не даст ему возможности гарантировать больший выигрыш (с точностью ε). Поэтому σ_0 будет *благоприятной* (оптимальной) стратегией для (A) .

Чтобы доказать это следствие, достаточно положить $f(x) = -g(x)$ и рассматривать игрока (A) как активного, а (B) — как пассивного; тогда

$$f(x_0; \sigma, \tau) = -g(x_0; \sigma, \tau)$$

и высказанное утверждение получается сразу.

Каждый раз, когда выигрыши обоих игроков одинаковы по абсолютной величине и противоположны по знаку, говорят, что игра представляет собой *поединок*; значение

$$f(\sigma, \tau) = -g(\sigma, \tau)$$

называется *результатом* игры. (A) стремится получить как можно больший результат, а (B) — как можно меньший. Наибольший резуль-

тат, который (A) может гарантировать посредством стратегии, есть

$$\alpha_0 = \sup_{\sigma} \inf_{\tau} f(\sigma, \tau).$$

Наименьший результат, который (B) может гарантировать посредством стратегии, есть

$$\beta_0 = \inf_{\tau} \sup_{\sigma} f(\sigma, \tau).$$

Заметим, что $\alpha_0 \leq \beta_0$, ибо если каждый из игроков (A) и (B) будет придерживаться благоприятной стратегии, то результат окажется не меньше α_0 и не больше β_0 . Но справедливо и значительно более сильное утверждение.

Теорема 5. Если в поединке граф (X, Γ) прогрессивно конечен, то $\alpha_0 = \beta_0$ ¹⁾.

В самом деле, ввиду следствия 2

$$\sup_{\sigma} f(\sigma, \tau_0) \leq f(\sigma_0, \tau_0) + \varepsilon$$

$$\inf_{\tau} f(\sigma_0, \tau) \geq f(\sigma_0, \tau_0) - \varepsilon.$$

откуда

$$\beta_0 \leq f(\sigma_0, \tau_0) + \varepsilon \leq \alpha_0 + 2\varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, $\beta_0 \leq \alpha_0$; а так как противоположное неравенство выполняется всегда, то $\beta_0 = \alpha_0$.

Пример 1. Следствий из этой теоремы очень много. Для прогрессивно конечной игры Ним, где результат может быть только $+1$ или -1 , получается уже известное нам утверждение: при данном начальном положении x_0 либо существует стратегия для (A), позволяющая ему наверняка выиграть ($\alpha_0 = +1$), либо существует стратегия для (B), обеспечивающая выигрыш ему ($\alpha_0 = -1$).

Пример 2. Рассмотрим следующую игру: (A) и (B) ходят по очереди, передвигая жетон по ребру графа, изображенного на рис. 6—3. Если по окончании партии окажется, что жетон прошел четное число раз через вершину, отмеченную кружком (a или b), то (A) платит один франк игроку (B); в противном случае (B) дает франк игроку (A).

При поверхностном анализе этой игры возможен следующий парадоксальный вывод. Можно подумать, что каждый из двух

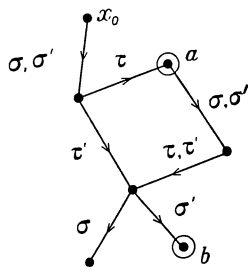


Рис. 6—3.

¹⁾ Мы доказали в [3] (гл. I, стр. 15—18), что это утверждение остается в силе и без предположения о прогрессивной конечности графа.

игроков имеет по две стратегии (указанные на рис. 6—3). Придерживаясь стратегии σ , игрок (А) может получить результат $f(\sigma, \tau) = -1$, а придерживаясь σ' — результат $f(\sigma', \tau') = -1$; поэтому кажется, что лучший выигрыш, который (А) способен гарантировать, есть $\alpha_0 = -1$. Точно такие же соображения дают $\beta_0 = +1$.

Выходит, будто $\alpha_0 < \beta_0$, в противоречии с теоремой 5.

В действительности мы имеем здесь дело с одним из тех кажущихся парадоксов, которые нередко встречаются в литературе.

Ошибка объясняется тем, что в данном случае *положение* игры — это не вершина графа, а последовательность μ пройденных вершин ¹⁾. В конечном счете важно, что выигрыш имеет вид $\max \{f(x)/x \in \langle \sigma, \tau \rangle\}$. При правильной постановке задачи, как легко проверить, $\alpha_0 = \beta_0 = +1$.

¹⁾ И, таким образом, у игрока (А) имеется не две, а четыре стратегии. — *Прим. ред.*

ГЛАВА 7

Задача о кратчайшем пути

Процессы по этапам

Для данного графа (X, Γ) и двух его вершин a и b можно поставить следующие задачи:

Задача 1. Найти в графе путь, ведущий из a в b .

Задача 2. Найти путь наименьшей длины, ведущий из a в b .
Вторая задача охватывает первую.

Пример 1. Любая игра с одним участником (например, меледа¹⁾, такен, или „игра в 15“ и др.) сводится к „процессу по этапам“:

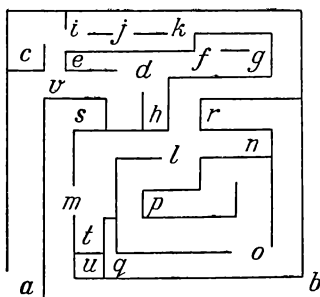


Рис. 7—1а.

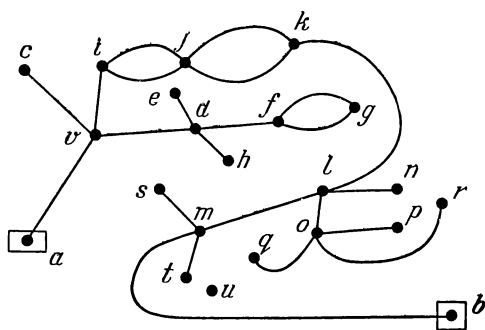


Рис. 7—1б.

дано положение a , мы стремимся последовательными этапами достигнуть положения b . Одним из известных примеров является *лабиринт*: путешественник, находящийся в a , ищет выход из лабиринта, двигаясь по коридорам (рис. 7—1а); это сводится к решению задачи 1 для графа, изображенного на рис. 7—1б, где X —множество перекрестков, а $y \in \Gamma x$, когда перекрестки x и y непосредственно соединены коридором.

¹⁾ Об игре „меледа“ (или сплетение колец), по-французски, *baguenaudier*, можно прочесть, например, в книге Люкас Э., Математические развлечения, СПб, 1883. См. также Доморяд А. П., Математические игры и развлечения, Физматгиз, 1961, стр. 67.— *Прим. перев.*

ПРИМЕР 2. Задача о волке, козе и капусте. Коза, капуста и волк находятся на берегу реки; перевозчику надо переправить их через реку, но его лодка так мала, что он может взять с собой не более одного из этих трех „пассажиров“. По очевидным причинам нельзя оставлять без надзора волка с козой, а козу с капустой. Как должен поступить перевозчик?

Эта широко известная задача легко решается в уме благодаря малому числу вариантов, подлежащих рассмотрению; тем не менее перед нами типичный пример задачи, сводящейся к задаче 1: чертится

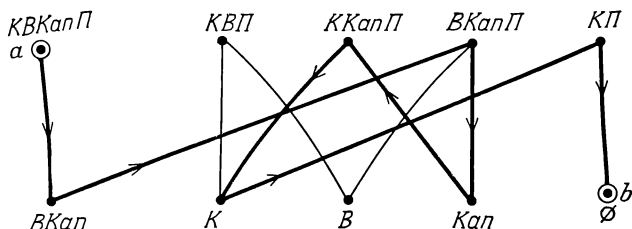


Рис. 7—2.

граф, изображенный на рис. 7—2, и ищется путь, ведущий из положения a (когда коза K , капуста $Кап$, волк B и перевозчик $П$ находятся на правом берегу) в положение b (когда все переправлены на левый берег); искомым путь показан на рисунке жирными линиями.

В более общем случае необходим систематический алгоритм, и мы изложим несколько методов.

Алгоритм для задачи 1 в плоском случае. Пусть граф G с двумя отмеченными вершинами a (вход) и b (выход), принадлежащими одной компоненте связности, является ab -плоским; последнее означает, что граф G' , полученный из G добавлением нового ребра $[a, b]$, можно полностью поместить на плоскости так, чтобы никакие два его ребра не имели общих точек, отличных от граничных (см., например, граф G , изображенный на рис. 7—1b). Пусть, далее, a не является вершиной никакого простого цикла. Для соответствующего лабиринта (рис. 7—1a) решение задачи 1 значительно упрощается, и достаточно руководствоваться следующим правилом: *выйдя на перекресток, выбирать всегда самый левый (или всегда самый правый) коридор.*

Общий алгоритм для задачи 1. Рассмотрим сначала граф, представляющий собой прадерево с корнем a (см. рис. 2—1), и найдем путь, ведущий из a в некоторую вершину b ; имеется следующий простой способ: выходим из a , идем по какой-нибудь ветви насколько возможно далеко, затем возвращаемся на ближайший перекресток и

отправляемся по новому, еще не изведанному направлению, и т. д., пока не натолкнемся на вершину b . Искомый путь из a в b будет тогда состоять из всех тех ребер, которые в процессе поисков были пройдены ровно по одному разу.

Если граф G не является прадеревом, то мы приходим к предыдущему случаю, „отсекая“ некоторые ребра u от одной из двух своих граничных точек x : это отсечение производим каждый раз, когда, пройдя по некоторому ребру u , мы попадаем на уже пройденный ранее перекресток x (ведь после отсечений ребра, пройденные хотя бы один раз, образуют прадерево).

Заметим, что этот алгоритм можно применить к задаче о лабиринте не только тогда, когда известен план, но и в случае, если путешественник заблудился: достаточно помечать какими-либо знаками встречающиеся на пути перекрестки и коридоры.

Другой алгоритм для задачи 1 (Тарри [5]). Путешественнику, заблудившемуся в лабиринте, достаточно соблюдать следующее правило: *никогда не проходить дважды по одному и тому же коридору в одном и том же направлении; находясь в x , не выбирать того коридора, который привел на перекресток x в первый раз, — если только имеется возможность другого выбора.*

1° Покажем, что если путешественник остановился потому, что не может более соблюдать это правило, то он находится в a , причем каждое ребро, инцидентное a , уже пройдено им в обоих направлениях. В самом деле, пусть он находится в x ($x \neq a$) и пусть этот перекресток был ранее пройден k раз; ребра, инцидентные x , были пройдены в общей сложности $k+1$ раз по направлению к x и k раз от x , значит, можно пойти по тому ребру, по которому путешественник еще не выходил из x .

2° Пусть $(a_0 = a, a_1, a_2, \dots)$ — последовательность различных пройденных перекрестков, пронумерованных в том порядке, в каком они встретились впервые; покажем, что каждое ребро, инцидентное любой вершине a_k , было пройдено дважды¹⁾. В самом деле, это верно при $k=0$ (в силу 1°); допустим, что это утверждение верно при $k \leq p-1$, и докажем его для $k=p$. Пусть (a_i, a_p) — ребро, которое привело путешественника в a_p в первый раз; так как $i < p$, то это ребро пройдено в обоих направлениях, что, в силу правила Тарри, возможно лишь в случае, когда все ребра, инцидентные a_p , пройдены в обоих направлениях. Ч. И. Т. Д.

3° Если существует путь $(a, x_1, x_2, \dots, x_m, b)$ из a в b , то, очевидно, перекресток b рано или поздно встретится путешественнику: действительно, в силу 2° каждая вершина, смежная с уже пройденной, тоже была когда-либо пройдена.

¹⁾ При этом все еще предполагается, что путешественник остановился в a потому, что не может более соблюдать правило Тарри. — *Прим. ред.*

Алгоритм для задачи 2. С помощью итерационного метода постепенно придадим каждой вершине x некоторый индекс, равный длине кратчайшего пути из a в x :

1° Вершину a пометим индексом 0.

2° Если все вершины, помеченные индексом m , образуют известное множество $A(m)$, то помечаем индексом $m+1$ вершины множества:

$$A(m+1) = \{x/x \in \Gamma A(m), x \notin A(k) \text{ при всех } k \leq m\}.$$

3° Как только вершина b окажется помеченной, останавливаемся; если $b \in A(m)$, то рассмотрим такие вершины b_1, b_2, \dots , что

$$\begin{aligned} b_1 &\in A(m-1), & b_1 &\in \Gamma^{-1}b, \\ b_2 &\in A(m-2), & b_2 &\in \Gamma^{-1}b_1, \\ &\dots & & \dots \\ b_m &\in A(0), & b_m &\in \Gamma^{-1}b_{m-1}. \end{aligned}$$

Путь $\mu = [a = b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b]$ дает решение задачи.

Некоторые обобщения

Часто возникают следующие задачи, являющиеся обобщениями задач 1 и 2:

Задача 3. Каждой дуге u данного графа (X, U) отнесем число $l(u) \geq 0$, которое назовем „длиной“ дуги u ; требуется найти путь μ , ведущий из данной вершины a в данную вершину b и такой, чтобы его полная длина

$$\sum_{u \in \mu} l(u)$$

была наименьшей.

Задача 4. Каждому пути $\mu = [x_1, x_2, \dots, x_m]$ отнесем число $f(\mu)$; найти путь μ , для которого число $f(\mu)$ является наименьшим.

Задача 5. Каждому частичному подграфу G_1 данного графа G отнесем число $h(G_1)$; найти частичный подграф G_1 , для которого число $h(G_1)$ является наименьшим.

Каждая из этих задач охватывает предыдущую.

Пример 1. Пусть X —множество географических пунктов, U —множество дорог, соединяющих некоторые из них. Предполагается, что все перекрестки дорог входят в X . Для дороги u число $l(u)$ может означать или ее длину в километрах, или стоимость проезда по ней, или же, например, продолжительность проезда (при соблюдении всех правил движения).

Тогда для поездки из одного пункта в другой ищется наиболее короткая, или наиболее экономичная, или наиболее быстрая дорога. В каждом из этих случаев мы должны решать задачу 3.

Пример 2. Динамические программы (Беллман [2]). Два золотых месторождения a и b содержат соответственно α и β тонн золота; но для их разработки имеется только одна машина, которая способна в течение года добыть $r\%$ золота, содержащегося в месторождении a (причем вероятность того, что в следующем году машина сохранит свою пригодность, равна p), или $s\%$ золота, содержащегося в b (с вероятностью q остаться пригодной для работы в следующем году). Рассмотрим граф с двумя вершинами a и b , где $\Gamma a = \Gamma b = \{a, b\}$, и будем искать такой путь $[x_1, x_2, \dots]$ (где $x_i = a$, если в течение i -го года предполагается разрабатывать месторождение a), для которого математическое ожидание прибыли будет наибольшим. Полное количество золота $F(\alpha, \beta)$, ожидаемое при оптимальной стратегии, определяется функциональным уравнением

$$F(\alpha, \beta) = \max \{r\alpha + pF((1-r)\alpha, \beta), s\beta + qF(\alpha, (1-s)\beta)\}.$$

Этот тип задачи, называемый „динамической программой“, является частным случаем задачи 4; здесь Γx — постоянное множество, а функция $f(\mu)$ имеет весьма специальный вид.

Мы будем заниматься только задачами типа 3: дан граф $G = (X, U)$, каждой его дуге отнесена „длина“ $l(u) \geq 0$; ищется путь μ из x_0 в x_n , минимизирующий полную „длину“:

$$l(\mu) = \sum_{u \in \mu} l(u).$$

Алгоритм для задачи 3 (Форд [3]). Процесс, легко осуществляемый и для сетей с большим количеством вершин, состоит в следующем:

1° Помечаем каждую вершину x_i индексом λ_i ; первоначально берем $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_i = +\infty$ при $i \neq 0$.

2° Ищем такую дугу (x_i, x_j) , для которой $\lambda_j - \lambda_i > l(x_i, x_j)$; затем заменяем индекс λ_j индексом $\lambda'_j = \lambda_i + l(x_i, x_j) < \lambda_j$; заметим, что $\lambda'_j > 0$ при $j \neq 0$. Продолжаем в том же духе, пока еще остается хотя бы одна дуга, для которой можно уменьшить λ_i .

3° После того как индексы установятся, найдется такая вершина x_{p_1} , что $\lambda_n - \lambda_{p_1} = l(x_{p_1}, x_n)$; в самом деле, индекс λ_n при нашем процессе монотонно уменьшался, а x_{p_1} — последняя вершина, послужившая для его уменьшения. Точно так же найдется вершина x_{p_2} , для которой $\lambda_{p_1} - \lambda_{p_2} = l(x_{p_2}, x_{p_1})$, и т. д.

Последовательность $\lambda_n, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \dots$ — строго убывающая, поэтому в некоторый момент будет $x_{p_{k+1}} = x_0$. Я утверждаю, что λ_n — длина

кратчайшего пути из x_0 в x_n и что $\mu_0 = [x_0, x_{p_k}, x_{p_{k-1}}, \dots, x_{p_1}, x_n]$ — этот кратчайший путь.

Доказательство. Пусть $\mu = [x_0, x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_{s+1}} = x_n]$ — произвольный путь между x_0 и x_n ; его длину (в обобщенном смысле) обозначим через $l(\mu)$; тогда

$$\begin{aligned} \lambda_{k_1} - 0 &\leq l(x_0, x_{k_1}), \\ \lambda_{k_2} - \lambda_{k_1} &\leq l(x_{k_1}, x_{k_2}), \\ &\vdots \\ \lambda_n - \lambda_{k_s} &\leq l(x_{k_s}, x_n). \end{aligned}$$

Складывая почленно эти неравенства, получаем, что для любого пути μ :

$$\lambda_n - 0 \leq l(\mu).$$

Так как для пути μ_0 имеем $\lambda_n = l(\mu_0)$, то путь μ_0 — кратчайший.

Пример. Предлагаем читателю проверить, что кратчайший путь между x_0 и x_9 в симметрическом графе, изображенном на рис. 7—3, имеет длину $l(\mu_0) = 14$.

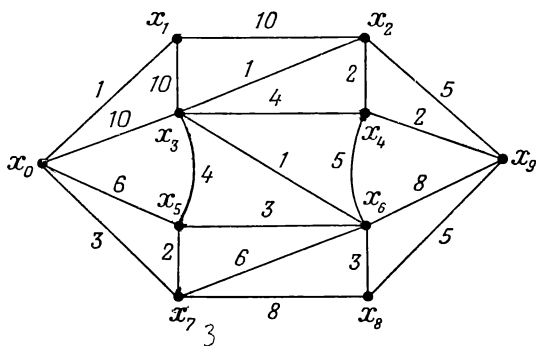


Рис. 7—3.

Замечание. Положим для простоты $l_j^i = l(x_i, x_j)$ при $(x_i, x_j) \in U$, $l_j^i = +\infty$ при $(x_i, x_j) \notin U$; каждому пути μ можно отнести числа ξ_j^i , где $\xi_j^i = 1$, если μ содержит дугу (x_i, x_j) , и $\xi_j^i = 0$ в противном случае. Задача 3 сведется тогда к нахождению системы целых чисел $\{\xi_j^i / i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n\}$, минимизирующей линейную

форму $\sum_{i,j} l_j^i \xi_j^i$ и удовлетворяющей системе линейных соотношений

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \xi_j^i \leq 1; \\ \sum_j (\xi_j^i - \xi_i^j) = 0 \quad \text{при } i \neq 0, i \neq n; \\ \sum_j (\xi_j^0 - \xi_0^j) = +1; \\ \sum_j (\xi_j^n - \xi_n^j) = -1. \end{array} \right.$$

Другими словами, мы имеем здесь дело с *линейной программой*, которую могут решать обычные электронные вычислительные машины; но не будет ли это стрельбой из пушки по воробьям?

ГЛАВА 8

Транспортные сети

Задача о наибольшем потоке

Транспортной сетью называется конечный граф без петель, каждой дуге u которого отнесено целое число $c(u) \geq 0$ (называемое *пропускной способностью* дуги u) и у которого

1° существует одна и только одна такая вершина x_0 , что $\Gamma^{-1}x_0 = \emptyset$; эта вершина называется *входом* сети;

2° существует одна и только одна такая вершина z , что $\Gamma z = \emptyset$; она называется *выходом* сети.

Пусть U_x^- — множество дуг, заходящих в x , а U_x^+ — множество дуг, исходящих из x . Говорят, что функция $\varphi(u)$, определенная на U и принимающая целочисленные значения, представляет собой *поток* по этой транспортной сети, если

$$(1) \quad \varphi(u) \geq 0 \quad (u \in U);$$

$$(2) \quad \sum_{u \in U_x^-} \varphi(u) - \sum_{u \in U_x^+} \varphi(u) = 0 \quad (x \neq x_0, \ x \neq z);$$

$$(3) \quad \varphi(u) \leq c(u) \quad (u \in U).$$

Функцию $\varphi(u)$ мы будем уподоблять количеству вещества, протекающего (в единицу времени) по дуге $u = (x, y)$ от x к y , причем это количество не превышает пропускной способности дуги, и в каждой вершине x , отличной от входа x_0 и выхода z , количество притекающего вещества равно количеству вытекающего.

Из (2) непосредственно следует

$$(4) \quad \sum_{u \in U_z^-} \varphi(u) = \sum_{u \in U_{x_0}^+} \varphi(u) = \varphi_z.$$

Это число φ_z , выражающее количество притекающего в z вещества, называется *притоком в точке z* , или *величиной* потока φ ; задача, которой мы здесь займемся, состоит в определении наибольшей величины потока по данной транспортной сети.

Пример 1. *Морской грузооборот между двумя континентами.* Некоторые порты x_1, x_2, \dots располагают продуктом, имеющим спрос в портах y_1, y_2, \dots ; пусть наличный запас продукта в x_i равен s_i , а потребность в этом продукте в y_j равна d_j . Обозначим

через c_{ij} полное количество продукта, которое способны перевезти суда, плывущие из x_i в y_j . Возможно ли удовлетворить все потребности? Как организовать перевозки? Чтобы свести эту задачу к задаче о наибольшем потоке, достаточно соединить x_i с y_j дугой пропускной способности c_{ij} , затем соединить вход x_0 с каждой вершиной x_i дугой пропускной способности s_i и, наконец, соединить каждую из вершин y_j с выходом z дугой пропускной способности d_j ; если φ — наибольший поток, то $\varphi(x_i, y_j)$ будет означать количество продукта, которое надо перевезти из x_i в y_j , чтобы удовлетворить потребности в наибольшей степени.

ПРИМЕР 2. (*Динамические сети* [3]). Из различных городов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ в одно и то же место назначения \bar{y} отправляются автомашины; если (\bar{x}_i, \bar{x}_j) — дорога, соединяющая два города \bar{x}_i и \bar{x}_j , то пусть t_{ij} означает продолжительность переезда по ней из \bar{x}_i в \bar{x}_j ; c_{ij} — количество автомашин, которое может пропустить эта дорога за единицу времени (в случае отсутствия дороги $c_{ij} = 0$); c_{ii} — количество автомашин, которое может одновременно находиться в городе \bar{x}_i ; a_i — первоначальное число автомашин в \bar{x}_i .

Как надо организовать движение, чтобы в течение промежутка времени θ в пункт \bar{y} прибыло возможно больше машин?

Определим транспортную сеть, множеством вершин которой служит декартово произведение

$$X = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{y}\} \times \{0, 1, 2, \dots, \theta\}.$$

Для вершины $x_i(t) = (\bar{x}_i, t)$ определим дуги $(x_i(t), x_j(t + t_{ij}))$ с пропускной способностью c_{ij} и дуги $(x_i(t), x_i(t + 1))$ с пропускной способностью c_{ii} ; обозначим через

$$\varphi(x_i(t), x_j(t + t_{ij}))$$

количество автомашин, выезжающих из города \bar{x}_i в момент t и направляющихся в \bar{x}_j ; при этом $\varphi(x_i(t), x_i(t + 1))$ будет количеством автомашин, остающихся в \bar{x}_i в момент t . Наконец, соединим вход x_0 с каждой из вершин $x_i(0)$ дугой пропускной способности a_i , а вершины $y(1), y(2), \dots, y(\theta)$ — с выходом z дугами пропускной способности $+\infty$; наибольший поток определит тогда оптимальное использование дорог (см. рис. 8—1).

Замечание. Положим для простоты $z = x_{n+1}$ и определим числа c_j^i и ξ_j^i (при $i = 0, 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n + 1$) следующим образом:

$$c_j^i = \begin{cases} 0, & \text{если } (x_i, x_j) \notin U; \\ c(x_i, x_j), & \text{если } (x_i, x_j) \in U; \end{cases}$$

$$\xi_j^i = \varphi(x_i, x_j).$$

Задача о наибольшем потоке сводится к определению такой системы чисел ξ_j^i , для которой

$$(1) \quad 0 \leq \xi_j^i \leq c_j^i \quad (i=0, 1, \dots, n; j=1, 2, \dots, n+1);$$

$$(2) \quad \sum_{k=0}^n \xi_k^i - \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j^i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n);$$

$$(3) \quad \sum_{j=0}^n \xi_{n+1}^j \text{ наибольшая.}$$

Таким образом, задача представляет собой классическую *линейную программу*, несмотря на то, что искомые ξ_j^i должны быть

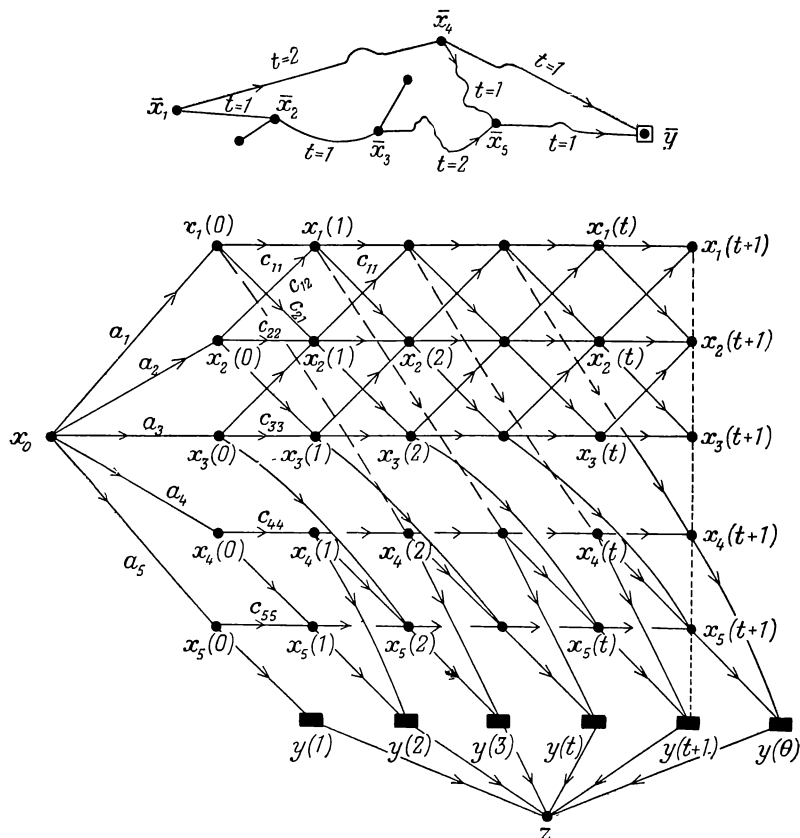


Рис. 8—1. Карта дорог и соответствующая пространственно-временная транспортная сеть.

целыми числами [в самом деле, из вида условий (1), (2), (3) следует, что целочисленное решение всегда есть]. Здесь можно было бы вос-

пользоваться симплекс-методом, однако алгоритмы, которые мы собираемся изложить, настолько проще, что позволяют находить вручную решение для чрезвычайно сложных сетей. (В корпорации РАНД этим способом был исследован граф с 500 вершин и 4000 дуг.)

Пусть $A \subset X$ — такое множество, что

$$x_0 \notin A, \quad z \in A.$$

Множество U_A^- дуг, заходящих в A , иногда называют *разрезом* сети; равным образом, *пропускной способностью* разреза U_A^- называют число

$$c(U_A^-) = \sum_{u \in U_A^-} c(u).$$

Каждая частица вещества, движущаяся от x_0 к z , пройдет хотя бы однажды по какой-нибудь дуге разреза U_A^- ; поэтому, каковы бы ни были поток φ и разрез U_A^- , всегда

$$\varphi_z \leq c(U_A^-).$$

Следовательно, если для некоторого потока φ и некоторого разреза V мы имеем $\varphi_z = c(V)$, то мы можем быть уверены, что поток φ имеет наибольшую величину (а разрез V обладает наименьшей пропускной способностью).

Алгоритм для определения наибольшего потока в плоском случае (Форд — Фалкерсон [2]). В случае x_0z -плоского графа (т. е. такого графа, который после добавления дуги (x_0, z) остается плоским) нахождение наибольшего потока можно осуществлять следующим образом.

1° Соединим x_0 и z дугой (z, x_0) , которую изобразим в виде горизонтального отрезка; граф чертим над отрезком (x_0, z) таким образом, чтобы никакие дуги не пересекались друг с другом в точках, отличных от граничных; поскольку граф плоский, можно определить *наивысший* путь из x_0 в z , выбирая всякий раз самую левую дугу не ведущую только в тупики или в уже пройденные вершины.

2° Рассмотрим наивысший путь μ_1 из x_0 в z и найдем дугу $u_1 \in \mu_1$ с наименьшей пропускной способностью. Затем удалим u_1 и вычтем $c(u_1)$ из пропускных способностей всех дуг пути μ_1 . То же самое сделаем опять, рассматривая новый наивысший путь μ_2 и его дугу u_2 с наименьшей пропускной способностью, и т. д.

3° Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не будут разрушены все пути из x_0 в z . Тогда в исходном графе G зададим на каждом пути μ_k поток, количественно равный

пропускной способности соответствующей дуги u_k (взятой в тот момент построения, когда μ_k был наивысшим путем). Суммарный поток и будет наибольшим потоком по G^1 .

Общий алгоритм для нахождения наибольшего потока (Форд и Фалкерсон [2]). Рассмотрим транспортную сеть с потоком $\varphi(x, y)$, величину которого φ_z мы стремимся улучшить.

1° Дугу u назовем *насыщенной*, когда $\varphi(u) = c(u)$; поток назовем *полным*, если каждый путь из x_0 в z содержит по крайней мере одну насыщенную дугу.

Если поток не является полным, то можно найти путь μ , все дуги которого не насыщены [при этом применяется тот же алгоритм, что и в задаче 1 (гл. 7): в частичном графе, образованном ненасыщенными дугами, находим путь из x_0 в z]. Положим

$$\begin{aligned}\varphi'(u) &= \varphi(u) + 1 & \text{при } u \in \mu, \\ \varphi'(u) &= \varphi(u) & \text{при } u \notin \mu.\end{aligned}$$

Очевидно, φ' представляет собой поток с величиной

$$\varphi'_z = \varphi_z + 1 > \varphi_z.$$

Таким способом нетрудно увеличивать неполный поток до тех пор, пока он не станет полным.

2° Пусть $\varphi(x, y)$ — полный поток; с помощью итерационного процесса будем последовательно пометать те вершины графа, в которые можно доставить единицу добавочного вещества.

Помечаем x_0 индексом 0.

Если x_i ²⁾ — уже помеченная вершина, то помечаем индексом $+i$ все те непомеченные вершины y , для которых

$$(x_i, y) \in U \text{ и } \varphi(x_i, y) < c(x_i, y).$$

Если вершина x_i помечена, то помечаем индексом $-i$ все не помеченные еще вершины y , для которых $(y, x_i) \in U$, $\varphi(y, x_i) > 0$.

Если этим процессом мы добились того, что вершина z оказалась помеченной, то между x_0 и z существует цепь μ , все вершины которой различны и (с точностью до знака) помечены номерами предыдущих вершин. Положим

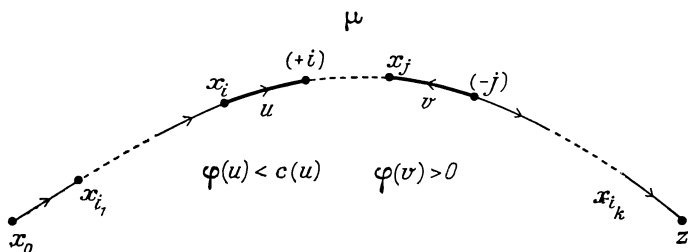
$$\varphi'(u) = \varphi(u), \text{ если } u \notin \mu;$$

¹⁾ Предлагаемое автором доказательство некорректно. Правильное доказательство можно, например, получить путем переделки из работы Форда и Фалкерсона [2], где рассматриваются сети с неориентированными ребрами и нецелочисленные потоки. Другое доказательство приводится в добавлении VI. — *Прим. перев.*

²⁾ Предполагается, что все вершины графа как-либо перенумерованы. — *Прим. ред.*

$\varphi'(u) = \varphi(u) + 1$, если $u \in \mu$ и при следовании по цепи μ от x_0 к z дуга u проходится в направлении ее ориентации;

$\varphi'(u) = \varphi(u) - 1$, если $u \in \mu$ и при следовании по μ от x_0 к z дуга u проходится в направлении, противоположном ее ориентации (см. рис. 8—2).



Р и с. 8—2.

Очевидно, $\varphi'(u)$ все еще является потоком, а так как $\varphi'_z = \varphi_z + 1$, то величина потока возросла.

3° Если некоторый поток φ^0 невозможно увеличить предыдущим методом, т. е. если невозможно пометить вершину z , то я утверждаю, что φ^0 имеет наибольшую величину.

В самом деле, пусть A — множество непомеченных вершин; так как $x_0 \notin A$, $z \in A$, то множество A определяет разрез U_A^- ; имеем

$$\varphi_z^0 = \sum_{u \in U_A^-} \varphi^0(u) - \sum_{u \in U_A^+} \varphi^0(u) = \sum_{u \in U_A^-} c(u) - 0 = c(U_A^-).$$

Поэтому поток φ^0 обладает наибольшей возможной величиной.

Из сказанного сразу вытекает фундаментальный результат.

Теорема Форда — Фалкersona. Для заданной транспортной сети наибольшая величина потока равна наименьшей пропускной способности разреза, т. е.

$$\max_{\varphi} \varphi_z = \min_{\substack{A \not\ni x_0 \\ A \ni z}} c(U_A^-).$$

Пример. Рассмотрим транспортную сеть на рис. 8—3 с полным потоком φ , который насыщает дуги, изображенные жирными линиями; его величина $\varphi_z = 5$. Читатель может сразу же получить наибольший поток величины 6.

Заметим, что для сети этого типа можно непосредственно получить наибольший поток по следующему правилу: будем увеличивать единица за единицей пропускаемый поток, перемещая каждую новую единицу по направлению к такой вершине, из которой может еще выйти наибольшее количество единиц; как только поток станет полным, он окажется наибольшим.

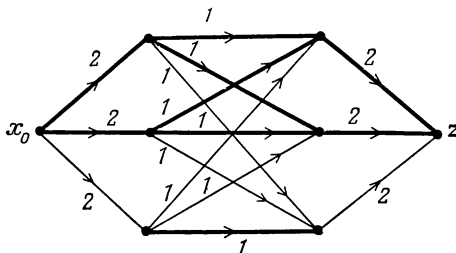


Рис. 8—3.

Вообще говоря, речь тут идет о некотором псевдоалгоритме, который оказывается весьма действенным в большинстве случаев, но не всегда дает наибольший поток и поэтому должен применяться лишь в первом приближении.

Задача о наименьшем потоке

Для заданной транспортной сети будем искать теперь поток φ наименьшей величины, удовлетворяющий условию

$$(3') \quad \varphi(u) \geq c(u) \quad (u \in U).$$

Эта задача, весьма близкая к предыдущей, встречается столь же часто.

Пример. *Наименьшее покрытие простого графа* (X, Y, Γ) . Назовем *покрытием* графа такое множество V дуг, что любая вершина графа служит граничной точкой хотя бы для одной из этих дуг. Ищется покрытие V с возможно меньшим $|V|$. Эта задача, которая в общем виде будет решена в главе 18, есть задача о наименьшем потоке для случая, когда граф — *простой*, т. е. образован двумя непересекающимися множествами X, Y и отображением Γ множества X на Y .

Соединим вход x_0 с каждой из вершин $x_i \in X$, а каждую вершину $y_j \in Y$ — с выходом z дугой пропускной способности $+1$ и примем пропускную способность остальных дуг равной нулю; при наименьшем потоке φ дуги $u \in U$, для которых $\varphi(u) > 0$, образуют наименьшее покрытие.

Алгоритм для задачи о наименьшем потоке. Можно применить процесс, в точности аналогичный процессу для задачи о наибольшем потоке; можно также свести ее к этой задаче следующим образом:

1° Ищем поток φ_1 , такой, что $\varphi_1(u) \geq c(u)$ при всех u (последовательно перемещая единицы вещества к дугам, наиболее далеким от насыщения).

2° Полагаем $c_2(u) = \varphi_1(u) - c(u)$ и строим при помощи алгоритма Форда — Фалкерсона такой наибольший поток φ_2 , что $\varphi_2(u) \leq c_2(u)$ при всех u .

3° Имеем

$$\varphi_1(u) - \varphi_2(u) \geq \varphi_1(u) - c_2(u) = c(u),$$

поэтому $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ есть искомый наименьший поток.

Задача о потоке, совместимом с множеством значений

Снова рассмотрим транспортную сеть, но каждой дуге u отнесем вместо числа $c(u) \geq 0$ множество $C(u)$ натуральных чисел. Возникают следующие задачи:

Задача 1. Построить такой поток $\varphi(u)$, чтобы $\varphi(u) \in C(u)$ при всех u .

Задача 2. Построить наибольший поток $\varphi(u)$, для которого $\varphi(u) \in C(u)$ при всех u .

Вторая задача включает первую; она охватывает также задачу о наибольшем потоке, если положить

$$C(u) = \{0, 1, 2, \dots, c(u)\}.$$

Пример 1. [Фишер (R. A. Fisher)]. Какое наибольшее количество троек можно образовать из n объектов (1), (2), ..., (n) таким образом, чтобы никакие два объекта не находились вместе более чем в p различных тройках? Эта задача сводится к отысканию наибольшего потока для сети, изображенной на рис. 8—4, где числа $C(u)$ указаны около каждой дуги u . Заметим, что задача этого типа возникла в биологии под названием „планирование неполных блоков“ („incomplete balanced block design“) при опытах по выведению различных сортов пшеницы и что теория, которую мы излагаем ниже, еще не дает возможности ее решить.

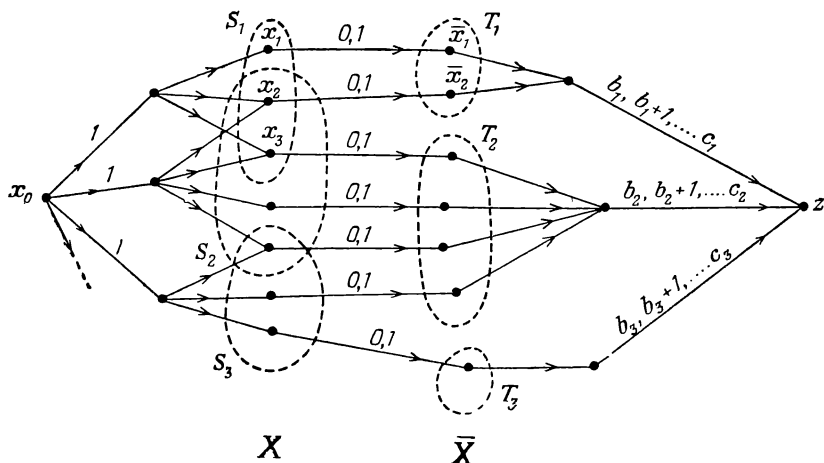
Пример 2 (Гофман — Кун [5]). Пусть X — конечное множество; S_1, S_2, \dots, S_n — некоторые подмножества X ; T_1, T_2, \dots, T_p — некоторые попарно непересекающиеся подмножества X ; $b_1, b_2, \dots, b_p, c_1, c_2, \dots, c_p$ — целые числа ($0 \leq b_i \leq c_i$ при всех i). Найти в X множество $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$, где $y_k \in S_k$ при $k = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющее условиям

$$b_i \leq |Y \cap T_i| \leq c_i \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Наконец, полную пропускную способность произвольного множества V дуг обозначаем

$$c(V) = \sum_{u \in V} c(u).$$

Лемма. Пусть $A_0 \subset \bar{X} = X \setminus \{x_0, z\}$; если для любого множества A , удовлетворяющего условию $A_0 \subset A \subset \bar{X}$, имеет место



Р и с. 8—5.

неравенство $c(U_A^-) \geq d(A)$, то

$$F(A_0) \geq d(A_0).$$

В самом деле, превратим данное множество $A_0 \subset \bar{X}$ в выход z_0 , удаляя дуги $U_{A_0}^+$ и все дуги, не принадлежащие никакому пути, идущему из x_0 в A_0 , и отождествляя все вершины A_0 ; для новой сети наибольшая величина потока вследствие теоремы Форда—Фалкерсона будет

$$\min_W c(W) = F(A_0).$$

Пусть W_0 — разрез (новой сети) с наименьшей пропускной способностью; он определяется некоторым множеством A (исходной сети), где $x_0 \notin A$, $A \supset A_0$, $z \notin A$; имеем $W_0 = U_A^-$, откуда

$$F(A_0) = c(W_0) = c(U_A^-) \geq d(A) \geq d(A_0).$$

Теорема 1 (Гейл [4]). Пусть дана транспортная сеть с пропускными способностями $c(u) \geq 0$; поток φ^0 , удовлетворяющий условию $\varphi^0(u) \leq c(u)$ и насыщающий дуги, идущие в z , существует в том и только в том случае, если

$$(1) \quad c(U_A^-) \geq d(A) \quad (A \subset \bar{X} = X \setminus \{x_0, z\}).$$

1° Если существует поток, который насыщает дуги, инцидентные z , то для любого $A \subset \bar{X}$

$$c(U_A^-) \geq F(A) \geq d(A).$$

Отсюда следует неравенство (1).

2° Допустим, что неравенство (1) верно, и рассмотрим произвольный разрез W , определяемый множеством S , где $x_0 \notin S$, $z \in S$. Положим $A = S \setminus \{z\}$; в силу леммы,

$$d(A) \leq F(A) \leq c(U_A^-) = c(U_S^-) - \sum_{x \notin A} c(x, z) = c(W) - d(X \setminus A).$$

Таким образом, для любого разреза W

$$c(W) \geq d(A) + d(X \setminus A) = d(X).$$

Наибольший поток φ^0 удовлетворяет тогда условию

$$\varphi_z^0 = \min_W c(W) \geq d(X).$$

Следовательно, этот поток насыщает все дуги, идущие в выход z .

Следствие (теорема о насыщении). Поток φ , удовлетворяющий условию $\varphi(u) \leq c(u)$ и насыщающий дуги, идущие в z , существует в том и только в том случае, если

$$(2) \quad F(Y) \geq d(Y) \quad (Y \subset \Gamma^{-1}z).$$

Надо доказать равносильность неравенства (1) предыдущей теоремы неравенству (2).

(1) \Rightarrow (2), так как, в силу леммы,

$$F(A) \geq d(A) \quad (A \subset \bar{X}),$$

откуда, в частности,

$$F(Y) \geq d(Y) \quad (Y \subset \Gamma^{-1}z).$$

(2) \Rightarrow (1), ибо если рассмотреть множество $A \subset \bar{X}$ и положить $Y = A \cap \Gamma^{-1}z$, то

$$d(A) = d(Y) \leq F(Y) \leq F(A).$$

Важным обобщением теоремы 1 является следующий результат:

Теорема 2 (Гофман¹⁾). Пусть каждой дуге u и некоторой транспортной сети отнесены два целых числа $b(u)$ и $c(u)$ [$0 \leq b(u) \leq c(u)$]. Пусть \mathcal{A} — семейство тех подмножеств множества X , которые либо не содержат ни x_0 , ни z , либо содержат x_0 и z одновременно. Поток φ , удовлетворяющий условию $b(u) \leq \varphi(u) \leq c(u)$ при всех u , существует в том и только в том случае, если

$$c(U_A^-) \geq b(U_A^+) \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Пусть дана сеть G с двумя числами $b(u)$ и $c(u)$ для каждой дуги u ; этой сети следующим образом можно поставить в соответствие сеть \bar{G} с пропускными способностями $\bar{c}(u)$: добавим к вершинам G две точки \bar{x}_0 и \bar{z} , которые будут служить входом и выходом сети \bar{G} ; каждой дуге $u = (x, y)$ из G припишем пропускную способность $\bar{c}(u) = c(u) - b(u)$; соединим вход \bar{x}_0 с вершиной y дугой пропускной способности $\bar{c}(\bar{x}_0, y) = b(u)$, а вершину x соединим с выходом \bar{z} дугой пропускной способности $\bar{c}(x, \bar{z}) = b(u)$.

Наконец, соединим z с x_0 дугой пропускной способности

$$\bar{c}(z, x_0) = +\infty.$$

1° Докажем равносильность двух утверждений:

(1) для сети G существует такой поток φ , что

$$b(u) \leq \varphi(u) \leq c(u);$$

(2) для сети \bar{G} существует поток $\bar{\varphi}$, который удовлетворяет условию $\bar{\varphi}(u) \leq \bar{c}(u)$ и насыщает дуги, идущие в выход \bar{z} .

(1) \Rightarrow (2). В самом деле, если φ существует, то достаточно определить $\bar{\varphi}$ на сети \bar{G} так:

$$\bar{\varphi}(u) = \varphi(u) - b(u) \quad \text{при} \quad u \in U,$$

$$\bar{\varphi}(x, \bar{z}) = \sum_{y \in \Gamma_x} b(x, y),$$

$$\bar{\varphi}(\bar{x}_0, y) = \sum_{x \in \Gamma^{-1}y} b(x, y),$$

$$\bar{\varphi}(z, x_0) = \varphi_z;$$

¹⁾ Этот результат, доказанный Гофманом (A. F. Hoffman) в терминах линейных программ, был перенесен на теорию сетей Л. Р. Фордом.

функция $\bar{\varphi}$ является потоком по \bar{G} , так как

- 1) $\bar{\varphi}(u) = \varphi(u) - b(u) \geq b(u) - b(u) = 0,$
- 2) $\bar{\varphi}(u) = \varphi(u) - b(u) \leq c(u) - b(u) = \bar{c}(u),$
- 3) $\sum_{u \in U_x^-} \bar{\varphi}(u) - \sum_{u \in U_x^+} \bar{\varphi}(u) = \sum_{u \in U_x^-} \varphi(u) - \sum_{u \in U_x^+} \varphi(u) = 0.$

Очевидно, поток $\bar{\varphi}$ насыщает дуги, идущие в выход \bar{z} .

(2) \Rightarrow (1). В самом деле, если $\bar{\varphi}$ существует, то определим функцию φ так:

$$\varphi(u) = \bar{\varphi}(u) + b(u) \quad (u \in U);$$

функция φ является потоком по G , удовлетворяющим требуемым условиям, так как

- 1) $\varphi(u) = \bar{\varphi}(u) + b(u) \geq 0 + b(u) = b(u),$
- 2) $\varphi(u) = \bar{\varphi}(u) + b(u) \leq \bar{c}(u) + b(u) = c(u),$
- 3) $\sum_{u \in U_x^-} \varphi(u) - \sum_{u \in U_x^+} \varphi(u) = 0.$

2° Теперь осталось найти необходимое и достаточное условие для (2). Для любого множества $A \subset X$ обозначим через V_A^- множество дуг сети \bar{G} , заходящих в A , а через $\bar{d}(A)$ — потребность множества A , определенную для сети \bar{G} ; в силу сказанного выше (теорема 1) условие (2) равносильно условию

$$\bar{c}(V_A^-) \geq \bar{d}(A) \quad (A \subset X).$$

Если это неравенство верно для некоторого множества S , не содержащего ни x_0 , ни z , то оно тем более верно для множества $T = S \cup \{z\}$, так как

$$\bar{c}(V_T^-) \geq \bar{c}(V_S^-) \geq \bar{d}(S) = \bar{d}(T).$$

Для множеств вида $R = S \cup \{x_0\}$ это неравенство выполняется всегда, ибо $\bar{c}(V_R^-) = +\infty$. Ограничимся теперь множествами A семейства \mathcal{A} ; в этом случае рассматриваемое неравенство будет иметь вид

$$\sum_{u \in U_A^-} \bar{c}(u) + \sum_{x \in A} \bar{c}(x_0, x) \geq \sum_{x \in A} \bar{c}(x, z) \quad (A \in \mathcal{A}),$$

или (см. рис. 8—6)

$$\begin{aligned} \sum_{u \in U_A^-} (c(u) - b(u)) + \sum_{u \in U_A^-} b(u) + \\ + \sum_{\substack{u=(x,y) \\ x \in A \\ y \in A}} b(u) \geq \sum_{\substack{u=(x,y) \\ x \in A \\ y \in A}} b(u) + \sum_{u \in U_A^+} b(u) \quad (A \in \mathcal{A}). \end{aligned}$$

или, окончательно,

$$c(U_A^-) \geq b(U_A^+) \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Алгоритм для задач 1 и 2 в случае, когда множество $C(u)$ — интервал. 1° Для сети G каждой дуге u , которой отнесены два

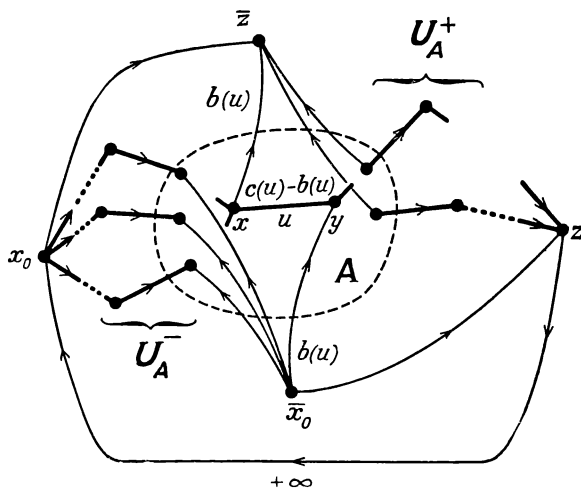


Рис. 8—6.

числа $b(u)$ и $c(u)$, удовлетворяющие условию $0 \leq b(u) \leq c(u)$, находим такой поток $\bar{\varphi}$, что $b(u) \leq \bar{\varphi}(u) \leq c(u)$, отыскивая, как прежде, наибольший поток $\bar{\varphi}$ для сети \bar{G} и полагая

$$\varphi(u) = \bar{\varphi}(u) + b(u).$$

2° Полученный таким образом поток φ не обязательно является наибольшим; но процесс, аналогичный процессу Форда — Фалкерсона, позволяет добиться наибольшей величины:

помечаем вершину x_0 коэффициентом 0;

если x_i — помеченная вершина, то помечаем коэффициентом $+i$ все те непомеченные вершины y , для которых

$$(x_i, y) \in U, \quad \varphi(x_i, y) < c(x_i, y);$$

если x_i — помеченная вершина, то помечаем коэффициентом — i все те непомеченные вершины y , для которых

$$(y, x_i) \in U, \quad \varphi(y, x_i) > b(y, x_i).$$

Если таким путем мы добьемся того, что вершина z окажется помеченной, то поток можно увеличить по методу Форда — Фалкерсона. Если же для некоторого потока φ^0 пометить z невозможно, то пусть A — множество тех вершин, которые невозможно пометить. Имеем $x_0 \notin A$, $z \in A$; величина φ^0 равна

$$\varphi_z^0 = \sum_{u \in U_A^-} \varphi^0(u) - \sum_{u \in U_A^+} \varphi^0(u) = c(U_A^-) - b(U_A^+).$$

Так как, с другой стороны, величина потока не может превышать $c(U_A^-) - b(U_A^+)$, то φ^0 — наибольший поток.

Из предыдущего следует

Теорема 3. Если для некоторой транспортной сети существует такой поток φ , что $0 \leq b(u) \leq \varphi(u) \leq c(u)$ для всех дуг u , то наибольшая величина этого потока равна

$$\varphi_z = \min_{\substack{A \ni z \\ A \nsubseteq x_0}} (c(U_A^-) - b(U_A^+)).$$

Бесконечные транспортные сети

Рассмотрим транспортную сеть, определяемую графом (X, U) , с пропускными способностями $c(u)$; в этом параграфе уже не предполагается, что $|X| < \infty$. Мы обобщим теорему о насыщении.

Теорема 4. Пусть $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$ — множество (предполагаемое счетным) вершин, смежных с выходом z бесконечной сети; если граф регрессивно конечен и Γ^{-1} -конечен в каждой точке, отличной от z , то необходимым и достаточным условием существования потока φ^0 , насыщающего все идущие в z дуги, является выполнение неравенства

$$F(A) \geq d(A) \quad (A \subset Y, |A| < \infty).$$

Положим $Y_n = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ и обозначим через X_n множество таких вершин, которые принадлежат по крайней мере одному пути, идущему от x_0 к z через какую-нибудь из точек множества Y_n .

Граф, получаемый изменением ориентаций всех дуг и удалением z , является Γ -конечным и прогрессивно конечным, следовательно, в силу теоремы 2 (гл. 3),

$$|(\hat{\Gamma}^{-1})y| < \infty \quad (y \in Y).$$

Значит, множество

$$X_n = \bigcup_{k=1}^n (\hat{\Gamma}^{-1}) y_k \cup \{z\}$$

конечно и порождаемая им подсеть G_n конечна.

Обозначим через Φ_n множество потоков φ_n по сети G_n , насыщающих выходные дуги [и, кроме того, если u — дуга, не входящая в G_n , то полагаем $\varphi_n(u) = 0$]. Так как G_n — конечная сеть, то $|\Phi_n| < \infty$; далее, в силу теоремы Гейла, $\Phi_n \neq \emptyset$; наконец, каждому потоку $\varphi_n \in \Phi_n$ можно очевидным образом поставить в соответствие поток $\varphi_{n-1} \in \Phi_{n-1}$, удовлетворяющий условию $\varphi_{n-1} \leq \varphi_n$; тогда ввиду следствия Кёнига (гл. 3) существует последовательность $(\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_n^0, \dots)$, где $\varphi_n^0 \in \Phi_n$ для всех n , такая, что

$$\varphi_1^0 \leq \varphi_2^0 \leq \dots \leq \varphi_n^0 \leq \dots$$

Положим $\varphi^0(u) = \sup_n \varphi_n^0(u)$ и покажем, что это — поток, совместимый с сетью G .

Если $a \neq z$, то множество U_a^- дуг, заходящих в a , конечно и существует такое натуральное число p , что

$$\varphi_p^0(u) = \varphi^0(u) \quad (u \in U_a^-).$$

Так как φ_p^0 — поток по сети G_p , то

$$\sum_{u \in U_a^-} \varphi^0(u) = \sum_{u \in U_a^-} \varphi_p^0(u) = \sum_{u \in U_a^+} \varphi_p^0(u) = \sum_{u \in U_a^+} \varphi^0(u).$$

Поэтому φ^0 — поток; он совместим с пропускными способностями, ибо

$$\varphi^0(u) = \sup_n \varphi_n^0(u) \leq c(u) \quad (u \in U).$$

Наконец, очевидно, что этот поток насыщает все выходные дуги; следовательно, он является искомым.

Теорема о полустепенях

Полустепени исхода и захода

Для большей общности мы рассматриваем здесь не графы, а мультиграфы; говорят, что мультиграф (X, U) есть *p-граф*, если одна и та же пара вершин может соединяться не более, чем p дугами из U (в каждом направлении).

Рассмотрим теперь p -граф с вершинами x_1, x_2, \dots, x_n . Назовем *полустепенью исхода* вершины x_k число дуг, исходящих из x_k , т. е.

$$d^+(x_k) = |U_{x_k}^+|.$$

Точно так же *полустепень захода* вершины x_k есть число дуг, заходящих в x_k , т. е.

$$d^-(x_k) = |U_{x_k}^-|.$$

При $d^+(x) = d^-(x) = 0$ вершина x называется *изолированной точкой*, при $d^+(x) \neq 0$, $d^-(x) = 0$ — *входом* при $d^+(x) = 0$, $d^-(x) \neq 0$ — *выходом*.

Для заданных целых неотрицательных чисел $r_1, r_2, \dots, r_n, s_1, s_2, \dots, s_n$ можно поставить вопрос: *существует ли p-граф, вершины которого x_1, x_2, \dots, x_n удовлетворяют условиям*

$$d^+(x_k) = r_k,$$

$$d^-(x_k) = s_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Вот задача, которую мы собираемся здесь решить.

Теорема о полустепенях. Пусть $(r_1, s_1), (r_2, s_2), \dots, (r_n, s_n)$ — пары целых неотрицательных чисел, причем нумерация произведена так, что

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n \geq 0.$$

Пары (r_k, s_k) образуют полустепени исхода и захода для вершин некоторого p -графа тогда и только тогда, когда

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \min \{pk, r_i\} \geq \sum_{j=1}^k s_j \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n r_i = \sum_{j=1}^n s_j.$$

Поставим множеству пар (r_k, s_k) в соответствие транспортную сеть G , образованную вершинами $x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, входом x_0 и выходом z ; вершины x_i и \bar{x}_j соединим дугой пропускной способности $c(x_i, \bar{x}_j) = p$, вершины x_0 и x_i — дугой пропускной способности $c(x_0, x_i) = r_i$, вершины \bar{x}_j и z — дугой пропускной способности $c(\bar{x}_j, z) = s_j$.

Каждый поток φ , насыщающий входные и выходные дуги сети G , определяет p -граф (X, U) , где вершина x_i соединена с x_j дугами в количестве $\varphi(x_i, \bar{x}_j)$; систему полустепеней этого p -графа образуют как раз пары (r_k, s_k) . Наоборот, каждый p -граф (X, U) с системой полустепеней (r_k, s_k) определяет поток по G , насыщающий входные и выходные дуги. В силу теоремы о насыщении (гл. 8), необходимое и достаточное условие существования такого потока состоит в том, чтобы выполнялось равенство (2) и чтобы для каждого множества $A = \{\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \dots, \bar{x}_{i_k}\}$ наибольшее количество потока, которое может войти в A , было не меньше потребности A , т. е. $F(\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \dots, \bar{x}_{i_k}) \geq d(\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \dots, \bar{x}_{i_k}) (k \leq n; i_1 < i_2 < \dots < i_k)$; или

$$(1') \quad \sum_{i=1}^n \min \{pk, r_i\} \geq s_{i_1} + s_{i_2} + \dots + s_{i_k} \\ (k \leq n; i_1 < i_2 < \dots < i_k).$$

Имеем $(1') \Rightarrow (1)$, а так как s_j пронумерованы в убывающем порядке, то и $(1) \Rightarrow (1')$.

Таким образом, оба сформулированных условия налицо.

При $p=1$ эта теорема выражает необходимое и достаточное условие, при котором пары (r_k, s_k) образуют полустепени исхода и захода некоторого графа. Этот результат можно представить в форме, более удобной для быстрой проверки. Пусть

$$r = (r_1, r_2, \dots)$$

конечная строчка целых неотрицательных чисел (пронумерованных в убывающем порядке); поставим ей в соответствие строчку

$$r^* = (r_1^*, r_2^*, \dots),$$

где r_k^* означает количество тех r_i , которые не меньше k ; строчка r^* называется *двойственной* для r . Тогда имеет место

Следствие 1¹). Пусть даны пары целых неотрицательных чисел (r_k, s_k) ; изменим по отдельности нумерации r_k и s_k так, чтобы было

$$\begin{aligned} r_1 &\geq r_2 \geq \dots \geq r_n, \\ s_1 &\geq s_2 \geq \dots \geq s_n. \end{aligned}$$

Образуем, далее, строчку $r^* = (r_1^*, r_2^*, \dots)$, двойственную для $r = (r_1, r_2, \dots)$, и добавлением нулей добьемся того, чтобы строчки r^* и s имели одну и ту же длину m .

Для того чтобы данные пары образовывали систему полустепеней некоторого графа, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} r_1^* + r_2^* + \dots + r_k^* &\geq s_1 + s_2 + \dots + s_k \quad (k < m), \\ r_1^* + r_2^* + \dots + r_m^* &= s_1 + s_2 + \dots + s_m. \end{aligned}$$

Это условие сразу получится из предыдущей теоремы, если показать, что для любого натурального k

$$\sum_{i=1}^n \min \{k, r_i\} = \sum_{j=1}^k r_j^*.$$

Последнее равенство верно при $k=1$; с другой стороны, если оно верно для какого-нибудь k , то оно верно и для $k+1$, поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \min \{k+1, r_i\} &= \sum_{r_i \leq k} \min \{k, r_i\} + \left(\sum_{r_i > k} \min \{k, r_i\} + r_{k+1}^* \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \min \{k, r_i\} + r_{k+1}^* = r_1^* + r_2^* + \dots + r_{k+1}^*. \end{aligned}$$

Ч. И. Т. Д.

Пример (задача об экскурсии). При поездке на экскурсию надо распределить m семей по n автобусам; семьи имеют соответственно r_1, r_2, \dots, r_m членов, а автобусы располагают соответственно s_1, s_2, \dots, s_n свободными местами. Можно ли всю группу распределить так, чтобы никакие два члена одной и той же семьи не попали в один и тот же автобус? Эта задача сводится к построению простого графа с заданными полустепенями; граф определяется множествами

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \quad \text{и} \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\};$$

¹) Этим условием мы, видимо, обязаны Гейлу [1]; в свете хорошо известной теоремы Харди — Литтлвуда — Поля [2] эти неравенства выражают тот факт, что вектор r^* является образом вектора s при линейном бистochastic преобразовании (см., например, Е. Т. Ф. М., гл. 8). (Другой вывод этого следствия и дальнейшей теоремы, а также некоторые их приложения имеются у Райзера [4]. — Прим. перев.)

вершина x_k имеет полустепени $(r_k, 0)$, а вершина y_k — полустепени $(0, s_k)$.

Пусть для определенности:

$$\begin{array}{ll} \text{свободные места } s_k = 5, 5, 4, 4, 4, 3, 2, 1, 1, 1, \\ \text{семьи } r_k = 8, 8, 5, 5, 4. \end{array}$$

Двойственная строчка образуется числами

$$r_1^* = r_2^* = r_3^* = r_4^* = 5; \quad r_5^* = 4; \quad r_6^* = r_7^* = r_8^* = 2.$$

Проверяем, разрешима ли задача:

$$\begin{aligned} 5 &\geq 5, \\ 5 + 5 &= 10 \geq 5 + 5 = 10 \\ 10 + 5 &= 15 \geq 10 + 4 = 14 \\ 15 + 5 &= 20 \geq 14 + 4 = 18 \\ 20 + 4 &= 24 \geq 18 + 4 = 22 \\ 24 + 2 &= 26 \geq 22 + 3 = 25 \\ 26 + 2 &= 28 \geq 25 + 2 = 27 \\ 28 + 2 &= 30 \geq 27 + 1 = 28 \\ 30 &\geq 28 + 1 = 29 \\ 30 &= 29 + 1 \end{aligned}$$

Значит, задача разрешима; теперь ее можно решать, как задачу о наибольшем потоке.

Допустим, что для данной системы полустепеней удалось построить граф $G = (X, U)$; рассмотрим такие вершины x, x', y, y' , что

$$\begin{aligned} x &\neq x', & y &\neq y'; \\ (x, y) &\in U, & (x', y') &\in U; \\ (x, y') &\notin U, & (x', y) &\notin U. \end{aligned}$$

Если дуги (x, y) и (x', y') заменить дугами (x, y') и (x', y) , то получится снова граф с той же системой полустепеней; такую замену мы назовем *перемещением*; важность этой операции обусловлена следующей теоремой:

Теорема 2. Если $G = (X, U)$ и $H = (X, V)$ — два графа с соответственно одинаковыми полустепенями исхода и захода в каждой вершине, то H можно получить из G конечным числом перемещений.

Графу G отнесем матрицу $A = (a_j^i)$ с n строками и n столбцами в которой

$$a_j^i = \begin{cases} 0, & \text{если } (x_i, x_j) \notin U; \\ 1, & \text{если } (x_i, x_j) \in U. \end{cases}$$

Точно так же отнесем графу H матрицу $B = (b_j^i)$; имеем

$$\sum_{j=1}^n a_j^i = \sum_{j=1}^n b_j^i = d^+(x_i),$$

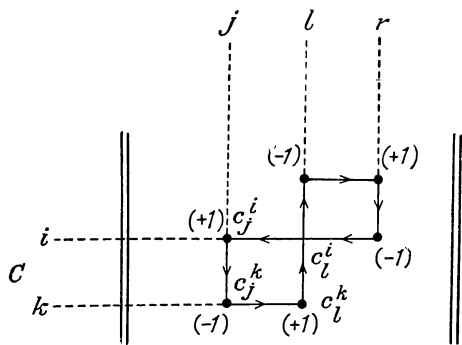
$$\sum_{i=1}^n a_j^i = \sum_{i=1}^n b_j^i = d^-(x_j).$$

Матрица $C = A - B$, по определению, образована элементами $c_j^i = a_j^i - b_j^i$; они равны $+1$, 0 или -1 , причем суммы этих элементов по строкам и по столбцам равны нулю.

В случае $\sum_{i,j} |c_j^i| = 0$ графы G и H совпадают; в случае $\sum_{i,j} |c_j^i| > 0$ покажем, что последовательными перемещениями на графах G и H можно получить матрицу $\bar{C} = \bar{A} - \bar{B} = (\bar{c}_j^i)$, у которой $\sum_{i,j} |\bar{c}_j^i| < \sum_{i,j} |c_j^i|$;

таким образом, повторение этой операции даст в конце концов графы \bar{G} и \bar{H} , совпадающие друг с другом.

Пусть c_j^i — некоторый элемент, равный $+1$; так как каждый столбец содержит столько же $+1$, сколько и -1 , то в j -ом столбце найдется элемент $c_j^k = -1$; точно так же в k -й строке найдется некоторый элемент $c_l^k = +1$, затем в l -ом столбце —



Р и с. 9—1.

некоторый элемент $c_l^m = -1$ и т. д. Тем самым в матрице C определится путь $c_j^i, c_j^k, c_l^k, c_l^m, \dots, c_r^s, c_r^i$. Если в некоторый момент мы придем в еще не пройденную точку $c_q^p = +1$ уже затронутого ранее q -го столбца, то отправимся далее в еще не встретившуюся точку $c_q^h = -1$ (это всегда возможно, ибо q -й столбец имеет столько же $+1$, сколько -1); так как матрица конечна, то рано или поздно мы вернемся в точку c_j^i и получим, таким образом, элементарный контур.

Рассмотрим квадрат $c_j^i, c_j^k, c_l^k, c_l^i$ (см. рис. 9—1). Возможны следующие четыре случая:

Случай 1: $c_l^i = -1$. Произведем перемещение

$$\begin{aligned}(x_i, x_j) &\rightarrow (x_i, x_l), \\ (x_k, x_l) &\rightarrow (x_k, x_j)\end{aligned}$$

на графе G . В полученной матрице \bar{C} будет $\bar{c}_j^i = \bar{c}_j^k = \bar{c}_l^k = \bar{c}_l^i = 0$ (остальные элементы — прежние), что соответствует поставленной цели.

Случай 2: $c_l^i = 0, (x_i, x_l) \notin U$. То же перемещение, что и в первом случае, даст нам $\bar{c}_j^i = \bar{c}_j^k = \bar{c}_l^k = 0, \bar{c}_l^i = 1$, а это опять отвечает цели.

Случай 3: $c_l^i = 0, (x_i, x_l) \in U$. Тогда $(x_i, x_l) \in V$, и перемещение

$$\begin{aligned}(x_i, x_l) &\rightarrow (x_i, x_j), \\ (x_k, x_j) &\rightarrow (x_k, x_l)\end{aligned}$$

на графе H приводит к тому же результату для матрицы \bar{C} , что и во втором случае.

Случай 4: $c_l^i = +1$. В этом случае найденный элементарный контур можно заменить более коротким: $c_l^i, c_l^m, \dots, c_r^i, c_r^i$. Повторяя для нового контура предыдущие рассуждения, мы либо натолкнемся на один из случаев 1, 2, 3, либо в конце концов придем к квадрату с элементами $+1, -1, +1, -1$ в вершинах, после чего достигнем цели очевидным перемещением.

Таким образом, доказано, что оба графа G и H можно последовательными перемещениями превратить в один и тот же граф $\bar{G} (= \bar{H})$. Но операция перемещения обратима, поэтому мы можем сначала перевести G в \bar{G} , а затем \bar{G} в H (применяя в обратном порядке перемещения, обратные тем, которые преобразуют H в \bar{G}). В конечном итоге получим H из G посредством перемещений.

Ч. И Т. Д.

ПРИМЕР. Пусть

$$\begin{aligned}X &= \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\}, \\ d^+(x_i) &= +1, \quad d^-(x_i) = 0, \\ d^+(y_j) &= 0, \quad d^-(y_j) = +1.\end{aligned}$$

Искомый граф отвечает некоторой перестановке индексов $1, 2, \dots, n$, и теорема 2 дает известный результат:

Из данной перестановки (i_1, i_2, \dots, i_n) можно получить любую другую перестановку тех же элементов при помощи конечного числа транспозиций.

Паросочетание простого графа

Задача о наибольшем паросочетании

Мы будем рассматривать здесь только *простой* граф (X, Y, Γ) , т. е. граф, определяемый двумя непересекающимися множествами X и Y и многозначным отображением Γ множества X в Y . Те же задачи мы поставим позднее и для произвольных графов (см. гл. 18), однако техника их решения будет совсем иной. Сначала предполагаем граф конечным.

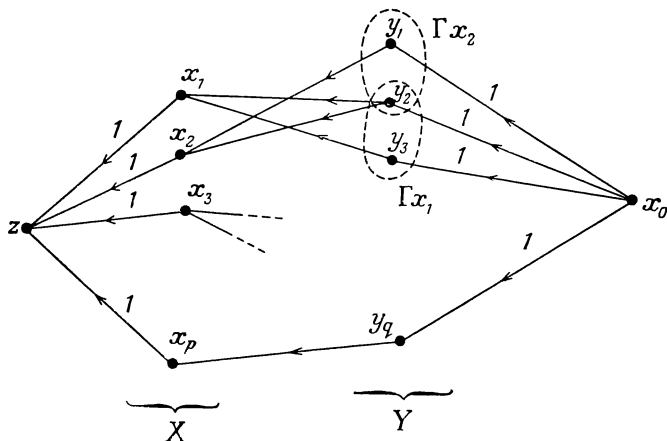
Назовем *паросочетанием* простого графа (X, Y, Γ) такое множество W его дуг, в котором никакие две дуги не смежны; если паросочетание устанавливает взаимно однозначное соответствие между некоторым множеством $A \subset X$ и некоторым множеством $B \subset Y$, то говорят, что это паросочетание *отображает* A на B , или что оно *отображает* A в Y . Мы хотим определить наибольшее число дуг паросочетания.

Пример 1. Задача о назначении лиц на должности. В учреждении имеется p работников x_1, x_2, \dots, x_p и p должностей y_1, y_2, \dots, y_p ; квалификация каждого работника позволяет ему занимать некоторые из должностей. Возможно ли произвести назначение таким образом, чтобы каждый работник занял должность в соответствии со своей квалификацией? Если обозначить через Γx_i множество тех должностей, которые может занимать лицо x_i , то задача сведется к рассмотрению простого графа (X, Y, Γ) и нахождению его паросочетания, отображающего X на Y .

Пример 2. Задача о воспитанниках и воспитанницах. В смешанном американском колледже каждая девушка имеет t друзей, а каждый юноша имеет t подруг; можно ли во время танца сделать так, чтобы каждая девушка танцевала с одним из своих друзей, а каждый юноша — с одной из своих подруг? Как мы покажем в свое время (следствие 2), ответ на этот вопрос — утвердительный.

Теорема Кёнига — Холла [4]. *Паросочетание, отображающее X в Y , существует тогда и только тогда, когда $|\Gamma A| \geq |A|$ для любого множества $A \subset X$.*

Рассмотрим транспортную сеть, определяемую точками множеств X и Y , входом z и выходом x_0 ; соединим x_0 с каждой вершиной $y_j \in Y$ дугой пропускной способности $c(x_0, y_j) = 1$; далее соединим каждую вершину $x_i \in X$ с z дугой пропускной способности $c(x_i, z) = 1$; наконец, всякий раз, когда $y_j \in \Gamma x_i$, соединяем y_j с x_i дугой пропускной способности ∞ (рис. 10—1). Если $A \subset X$, то полная потребность множества A равна $d(A) = |A|$; наибольшее количество потока, которое может поступить в A , равно $F(A) = |\Gamma A|$.



Р и с. 10—1.

Всякий поток по сети определяет некоторое паросочетание простого графа, причем точка x_i отображается в y_j , когда по дуге (y_j, x_i) проходит единица потока; наоборот, всякое паросочетание определяет некоторый поток. Отобразить X в Y возможно тогда и только тогда, когда наибольший поток насыщает выходные дуги, т. е., в силу теоремы о насыщении (гл. 8), когда

$$F(A) \geq d(A) \quad (A \subset X),$$

или, иначе,

$$|\Gamma A| \geq |A| \quad (A \subset X).$$

Ч. И Т. Д.

Итак, нахождение наибольшего паросочетаия представляет собой задачу о наибольшем потоке, и здесь можно применить алгоритм Форда — Фалкерсона (гл. 8).

Следствие 1. В простом графе $G = (X, Y, \Gamma)$, у которого $|X| = p$, $|Y| = q$, пронумеруем вершины $x_i \in X$ и $y_j \in Y$ таким образом, чтобы

$$|\Gamma x_1| \leq |\Gamma x_2| \leq \dots \leq |\Gamma x_p|, \\ |\Gamma^{-1} y_1| \geq |\Gamma^{-1} y_2| \geq \dots \geq |\Gamma^{-1} y_q|.$$

Тогда достаточное условие существования паросочетаия, отображающего X в Y , выразится так:

$$(1) \quad |\Gamma x_1| + |\Gamma x_2| + \dots + |\Gamma x_k| > \\ > |\Gamma^{-1} y_1| + |\Gamma^{-1} y_2| + \dots + |\Gamma^{-1} y_{k-1}| \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

В самом деле, рассмотрим два множества:

$$A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\} \text{ и } B = \{y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_{k-1}}\},$$

с количествами элементов соответственно k и $k-1$; в силу (1),

$$|\Gamma x_{i_1}| + |\Gamma x_{i_2}| + \dots + |\Gamma x_{i_k}| > |\Gamma^{-1} y_{j_1}| + |\Gamma^{-1} y_{j_2}| + \dots + |\Gamma^{-1} y_{j_{k-1}}|.$$

Поэтому число дуг, исходящих из A , строго превышает число дуг, заходящих в B ; значит, $\Gamma A \not\subset B$, каково бы ни было множество B из $k-1$ элементов; отсюда $|\Gamma A| > k-1 = |A| - 1$ и окончательно

$$|\Gamma A| \geq |A| \quad (A \subset X).$$

Поэтому X можно отобразить в Y требуемым образом.

Следствие 2. Если для простого графа (X, Y, Γ) существует такое целое число t , что $|\Gamma x| \geq t$ для любой вершины $x \in X$ и $|\Gamma^{-1} y| \leq t$ для любой вершины $y \in Y$, то можно построить паросочетание, отображающее X в Y .

Действительно, условие (1) предыдущего следствия здесь выполнено.

Следствие 3. Пусть (X, Y, Γ) — простой граф, а

$$t = \max \{ |\Gamma x|, |\Gamma^{-1} y| / x \in X, y \in Y \};$$

всегда существует паросочетание, использующее все те вершины x , для которых $|\Gamma x| = t$, и все те вершины y , для которых $|\Gamma^{-1} y| = t$.

1° Сначала покажем, что можно построить простой граф (X', Y', Γ') , все вершины которого имеют полустепень t и который содержит (X, Y, Γ) в качестве подграфа.

В самом деле, построим t одинаковых копий графа (X, Y, Γ) :

$$(X^1, Y^1, \Gamma), (X^2, Y^2, \Gamma), \dots, (X^m, Y^m, \Gamma);$$

если вершина $x \in X$ такова, что $t - |\Gamma x| = k > 0$, то рассмотрим соответственные точки $x^1 \in X^1, x^2 \in X^2, \dots, x^m \in X^m$ и каждую из них соединим дугами со всеми вершинами нового множества

$$Y(x) = \{y(1, x), y(2, x), \dots, y(k, x)\},$$

состоящего из k точек и специально построенного для нашей цели. Пропедев это со всеми точками $x \in X$, возьмем точку $y \in Y$, для которой $|\Gamma^{-1}y| < m$, построим вспомогательное множество $X(y)$ и все точки этого множества соединим с y , и т. д.

Положим

$$X' = \bigcup_{i \leq m} X^i \cup \bigcup_{y \in Y} X(y),$$

$$Y' = \bigcup_{j \leq m} Y^j \cup \bigcup_{x \in X} Y(x).$$

Простой граф, определяемый множествами X' , Y' и построенными дугами, удовлетворяет требуемым условиям и содержит (X^1, Y^1, Γ) в качестве подграфа.

Заметим, что $|X'| = |Y'|$.

2° В силу следствия 2, в новом графе можно построить паросочетание, отображающее X' в Y' ; каждой вершине $x^1 \in X^1$, для которой $|\Gamma x^1| = m$, будет отвечать вершина в Y^1 , а каждой вершине $y^1 \in Y^1$, для которой $|\Gamma^{-1}y^1| = m$, — вершина в X^1 ; поэтому в графе (X^1, Y^1, Γ) , т. е. в (X, Y, Γ) , существует паросочетание, использующее все эти вершины.

Следствие 4. *Хроматический класс простого графа (X, Y, Γ) есть*

$$m = \max \{ |\Gamma x|, |\Gamma^{-1}y| / x \in X, y \in Y \}.$$

Надо доказать, что дуги графа можно раскрасить в m различных цветов так, чтобы смежные дуги не были окрашены одинаково. Первой краской окрасим все дуги того паросочетания, которое использует все вершины с полустепенями m ; второй краской окрасим дуги паросочетания, использующего вершины наибольшей полустепени в том частичном графе, который образован не окрашенными еще дугами, и т. д. Эти паросочетания существуют, в силу предыдущего следствия, и при каждом шаге наибольшая полустепень вершин графа уменьшается на единицу. Поэтому m красок достаточно для раскрашивания всех дуг графа (X, Y, Γ) .

Пример (латинские квадраты)¹⁾. Следствие 4 имеет любопытное применение к теории латинских квадратов, придуманной Эйлером. Говорят, что дан *латинский квадрат* порядка n , если клетки квадрата $n \times n$ заполнены буквами y_1, y_2, \dots, y_n таким образом, что ни одна строка и ни один столбец не содержит двух одинаковых букв. Для выяснения того, является ли заданный прямоугольник с буквами частью некоторого латинского квадрата, служит следующая теорема:

Пусть T — прямоугольник $p \times q$, заполненный буквами y_1, y_2, \dots, y_n так, что ни одна строка и ни один столбец не

¹ В настоящее время латинские квадраты применяются, например в биометрии. — *Прим. перев.*

содержат двух одинаковых букв, и пусть буква y встречается в T $t(y)$ раз. Для того чтобы путем добавления $n - p$ строк и $n - q$ столбцов было возможно превратить T в латинский квадрат $n \times n$, необходимо и достаточно, чтобы

$$t(y_k) \geq p + q - n \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

1° Условие необходимо. В самом деле, пусть Γ_i — множество из $n - q$ букв, не встречающихся в i -й строке прямоугольника T , и пусть $m'(y)$ — число множеств из $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p$, которые содержат y . Если можно построить латинский квадрат, то $m'(y) \leq n - q$, откуда

$$t(y) = p - m'(y) \geq p - n + q.$$

2° Условие достаточно. Действительно, положим $P = \{1, 2, \dots, p\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, определим множества Γ_i , как выше, проведем из каждой вершины $i \in P$ дуги в те $y \in Y$, для которых $y \in \Gamma_i$, и рассмотрим полученный простой граф (P, Y, Γ) ; имеем

$$|\Gamma_i| = n - q \quad (i \in P),$$

$$|\Gamma^{-1}y| = m'(y) \leq n - q \quad (y \in Y).$$

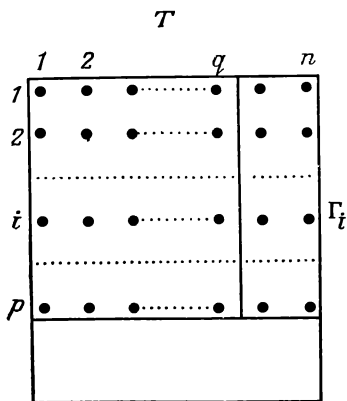


Рис. 10—2.

Значит, в силу следствия 4, мы можем раскрасить дуги графа в $n - q$ цветов: синий, красный и т. д. Начнем пополнять T новыми $n - q$ столбцами: первый столбец образуем из концов синих дуг, исходящих из P , второй — из концов красных дуг, исходящих из P , и т. д. Полученный таким образом прямоугольник \bar{T} с размерами $p \times n$ удовлетворяет условию теоремы, поскольку $\bar{t}(y) = p = (p + n) - n$; после этого остается повторить аналогичное рассуждение, переменив ролями столбцы и строки.

Дефицит простого графа

Дефицитом простого графа $G = (X, Y, \Gamma)$ называется число

$$\delta_0 = \max_{A \subset X} (|A| - |\Gamma A|).$$

Всегда $\delta_0 \geq 0$ (ибо $|\emptyset| - |\Gamma \emptyset| = 0$), поэтому теорему Кёнига — Холла можно сформулировать еще и так: *необходимое и достаточное условие существования паросочетания, отображающего X в Y , состоит в том, чтобы $\delta_0 = 0$* . Мы здесь ставим целью улучшить этот результат и, точнее, оценить наибольшее число дуг паросочетания.

Прежде всего, назовем *опорой* простого графа $G = (X, Y, \Gamma)$ всякое такое множество $C \subset X \cup Y$, что каждая дуга имеет по крайней мере одну из своих граничных вершин в C ; это понятие важно и само по себе. Имеют место следующие результаты:

Теорема 2. *В простом графе $G = (X, Y, \Gamma)$ наименьшее количество элементов опоры C равно $|X| - \delta_0$.*

В самом деле,

$$\begin{aligned} |X| - \delta_0 &= |X| - \max_{A \subset X} (|A| - |\Gamma A|) = \\ &= \min_{A \subset X} (|X| - |A| + |\Gamma A|) = \min_{B \subset X} (|B| + |\Gamma(X \setminus B)|), \end{aligned}$$

где $B = X \setminus A$.

Но множество $B \cup \Gamma(X \setminus B)$ является опорой, причем всякая наименьшая опора имеет такой вид; поэтому справедлив сформулированный результат.

Теорема 3. *Число внутренней устойчивости простого графа $G = (X, Y, \Gamma)$ равно $\alpha(G) = |Y| + \delta_0$.*

В самом деле, если C — опора, то ее дополнение $S = (X \cup Y) \setminus C$ является внутренне устойчивым множеством (никакая дуга не может иметь обеих граничных точек в S); наоборот, если S — внутренне устойчивое множество, то его дополнение является опорой. Отсюда

$$\begin{aligned} \alpha(G) &= \max_S |S| = \max_C (|X| + |Y| - |C|) = |X| + \\ &+ |Y| - \min_C |C| = |X| + |Y| - (|X| - \delta_0) = |Y| + \delta_0. \end{aligned}$$

Замечание. Теорему 3 можно сформулировать иначе. В произвольном графе обозначим через $\Delta x = \{y/y > x\}$ множество вершин, строго следующих за x (см. гл. 2), и будем говорить, что две вершины x_1 и x_2 *несравнимы*, если не имеет места ни $x_1 > x_2$, ни $x_2 > x_1$. В случае простого графа (X, Y, Γ) , очевидно,

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Gamma x, \quad \text{если } x \in X; \\ \Delta x &= \emptyset, \quad \text{если } x \in Y. \end{aligned}$$

Теорему 3 сформулируем следующим образом: *наибольшее число попарно несравнимых вершин, которые можно найти в простом графе, равно*

$$\max_{A \subset X \cup Y} (|A| - |\Delta A|).$$

Замечательно, что в этой формулировке теорема остается в силе и для произвольных графов¹⁾.

Исследуем теперь взаимосвязь между дефицитом простого графа и наибольшим числом дуг паросочетания.

Лемма 1. Если для $A \subset X$ положить $\delta(A) = |A| - |\Gamma A|$, то

$$\delta(A_1 \cup A_2) + \delta(A_1 \cap A_2) \geq \delta(A_1) + \delta(A_2).$$

В самом деле, справедливы соотношения

$$|A_1 \cup A_2| + |A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2|,$$

$$|\Gamma(A_1 \cup A_2)| + |\Gamma(A_1 \cap A_2)| \leq |\Gamma A_1 \cup \Gamma A_2| + |\Gamma A_1 \cap \Gamma A_2| = |\Gamma A_1| + |\Gamma A_2|.$$

Вычитая второе соотношение из первого, получим требуемую формулу.

Лемма 2. Семейство $\mathcal{A} = \{A/\delta(A) = \delta_0\}$ образует структуру относительно операций \cup и \cap , т. е.

$$A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}, \quad A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}.$$

В самом деле, если $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, то, в силу леммы 1,

$$\delta(A_1 \cup A_2) + \delta(A_1 \cap A_2) \geq \delta(A_1) + \delta(A_2) = 2\delta_0.$$

¹⁾ Доказательство можно провести, например, так: если (X, Γ) — данный конечный граф, то построим простой граф (X, \bar{X}, Δ) , указывающий для каждой вершины все строго последующие, и рассмотрим наименьшую опору $C = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots; \bar{x}_{j_1}, \bar{x}_{j_2}, \dots\}$.

^{1°} Сначала покажем, что индексы этих вершин различны. Действительно, если бы, например, $i_1 = j_1$, то существовал бы такой индекс $k \neq i_1, i_2, \dots$, что

$$\bar{x}_{i_1} \in \Delta x_k$$

(поскольку множество $C \setminus \{\bar{x}_{i_1}\}$, имеющее на один элемент меньше, чем C , не может быть опорой); по той же причине нашелся бы такой индекс $h \neq j_1, j_2, \dots$, что

$$\bar{x}_h \in \Delta x_{i_1};$$

но

$$x_k < x_{i_1}, \quad x_{i_1} < x_h \Rightarrow x_k < x_h,$$

вопреки тому, что дуга (x_k, \bar{x}_h) не имеет своих граничных точек в опоре C .

^{2°} Рассмотрим в графе (X, Γ) множество $S = X \setminus \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots; \bar{x}_{j_1}, \bar{x}_{j_2}, \dots\}$; все его элементы попарно несравнимы, оно — наибольшее из множеств с этим свойством, и, в силу теоремы 2, имеем

$$|S| = |X| - |C| = |X| - \left[|X| - \max_{A \subset X} (|A| - |\Delta A|) \right] = \max_{A \subset X} (|A| - |\Delta A|).$$

Ч. И Т. Д.

Так как ни одно из слагаемых $\delta(A_1 \cup A_2)$ и $\delta(A_1 \cap A_2)$ не может быть больше δ_0 , то необходимо $\delta(A_1 \cup A_2) = \delta_0$, $\delta(A_1 \cap A_2) = \delta_0$, что и доказывает утверждение.

Лемма 3. Если $\delta_0 > 0$, то пересечение A_0 всех множеств семейства $\mathcal{A} = \{A / \delta(A) = \delta_0\}$ есть непустое множество этого семейства.

Так как граф конечен, то A_0 есть пересечение конечного числа множеств из \mathcal{A} и, в силу предыдущей леммы, $A_0 \in \mathcal{A}$; кроме того, если бы $A_0 = \emptyset$, то мы имели бы

$$\delta_0 = \delta(A_0) = \delta(\emptyset) = 0,$$

что противоречит предположению о том, что $\delta_0 > 0$.

Теорема 4 (Кёниг — Оре [9]). В простом графе наибольшее число дуг паросочетания равно $|X| - \delta_0$.

Если $\delta_0 = 0$, то утверждение уже доказано (на основании теоремы Кёнига — Холла); допустим теперь, что $\delta_0 > 0$, и рассмотрим пересечение A_0 (непустое) тех множеств A , для которых $\delta(A) = \delta_0$.

1° Если удалить из графа вершину $x_0 \notin A_0$, то дефицит не изменится. В самом деле, дефицит нового графа $\delta'_0 \leq \delta_0$; а так как новый граф содержит множество A_0 , для которого $\delta(A_0) = \delta_0$, то $\delta'_0 = \delta_0$.

2° Если удалить из графа вершину $x_0 \in A_0$, то дефицит графа уменьшится ровно на единицу. Действительно, поскольку удаление x_0 разрушает все те множества A , для которых $\delta(A) = \delta_0$, то дефицит нового графа $\delta'_0 < \delta_0$; поэтому множество $A'_0 = A_0 \setminus \{x_0\}$ удовлетворяет условию

$$\delta(A'_0) = |A_0| - 1 - |\Gamma A'_0| < \delta_0 = |A_0| - |\Gamma A_0|,$$

откуда

$$|\Gamma A'_0| \geq |\Gamma A_0|.$$

В силу $A'_0 \subset A_0$ справедливо также обратное неравенство; значит,

$$|\Gamma A'_0| = |\Gamma A_0|$$

и, наконец,

$$\delta(A'_0) = |A'_0| - |\Gamma A'_0| = (|A_0| - 1) - |\Gamma A_0| = \delta_0 - 1;$$

последнее же ввиду $\delta'_0 < \delta_0$ означает, что $\delta'_0 = \delta_0 - 1$.

3° Так же, как и выше, доказывается, что δ_0 есть наименьшее число вершин из X , которые надо удалить, чтобы полученный граф обладал дефицитом $\delta'_0 = 0$, т. е. допускал паросочетание, отображающее множество его вершин X' в Y ; отсюда и следует сформулированный результат.

Следствие (теорема Кёнига) *В простом графе наименьшее число вершин опоры равно наибольшему числу дуг паросочетания.* (Сопоставление теорем 2 и 4).

Последний результат дает нам возможность установить новый алгоритм для определения некоторого наибольшего паросочетания; этот алгоритм, более поучительный в применении к теории графов, чем алгоритм отыскания наибольшего потока, основан на работах Эрговари [2] и Куна [5] и обычно известен под именем „венгерского алгоритма“.

Венгерский алгоритм

Рассмотрим простой граф (X, Y, Γ) и паросочетание W , дуги которого будем называть *сильными* и изображать жирными линиями (остальные дуги называем *слабыми* и изображаем тонкими линиями); предположим, что паросочетание W — *полное*: каждая слабая дуга смежна по крайней мере с одной сильной дугой.

Вершину z , не являющуюся граничной ни для какой сильной дуги, назовем *ненасыщенной*. Если $w \in W$, то через Δw обозначим множество тех сильных дуг, концы которых смежны с началом дуги w ; обозначим через W^+ множество тех сильных дуг, концы которых смежны хотя бы с одной ненасыщенной вершиной, а через W^- — множество сильных дуг, начала которых смежны хотя бы с одной ненасыщенной вершиной (см. рис. 10—3).

Рис. 10—3.

Теперь можно сформулировать теорему.

Теорема 5. *Следующие четыре условия равносильны:*

(1) *в простом графе (X, Y, Γ) паросочетание W — наибольшее;*
 (2) *в простом графе (X, Y, Γ) не существует чередующихся цепей (состоящих из поочередно идущих слабых и сильных дуг), соединяющих две различные ненасыщенные точки;*

(3) *в графе (W, Δ) не существует пути, идущего из точки множества W^+ в точку множества W^- ;*

(4) *в графе (W, Δ) каждую вершину можно пометить знаком „+“ или „—“ так, чтобы все вершины множества W^+ получили знак „+“, все вершины множества W^- — знак „—“ и чтобы никакая дуга (ориентированная) не шла из „+“ в „—“*

Покажем, что $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Rightarrow (2)$, так как если бы существовала чередующаяся цепь U_0 , соединяющая две различные ненасыщенные вершины, то паросочета-

ние $W' = (W \setminus U_0) \cup (U_0 \setminus W)$ имело бы на одну дугу больше, чем W , т. е. паросочетание W не было бы наибольшим.

(2) \Rightarrow (3), так как всякому пути графа (W, Δ) , идущему из W^+ в W^- , отвечает хотя бы одна чередующаяся цепь, соединяющая две ненасыщенные точки $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$.

(3) \Rightarrow (4). Пометим знаком „+“ все вершины множества $\hat{\Delta}W^+$ и знаком „—“ все вершины множества $W \setminus \hat{\Delta}W^+$; имеем $W^+ \subset \hat{\Delta}W^+$ и $W^- \subset W \setminus \hat{\Delta}W^+$ (так как не существует пути, идущего из W^+ в W^-); поэтому условие (4) выполняется.

(4) \Rightarrow (1) В графе (X, Y, Γ) с паросочетанием W пометим сильные дуги знаком „+“ или „—“ в соответствии с условием (4) и обозначим через X^- множество начальных точек сильных дуг, помеченных знаком „—“, а через Y^+ — множество конечных точек сильных дуг, помеченных знаком „+“.

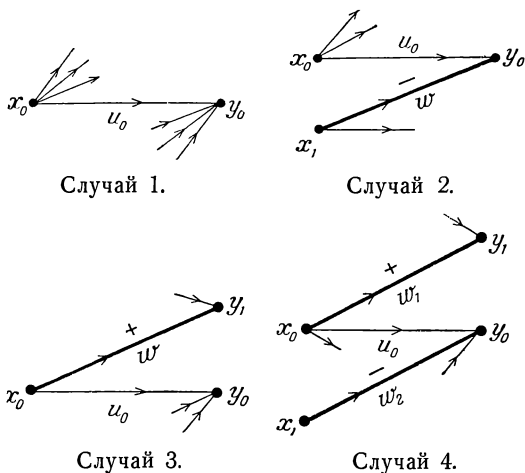


Рис. 10—4.

Для дуги $u_0 = (x_0, y_0)$, удовлетворяющей условию $x_0 \notin X^-$, $y_0 \notin Y^+$, рассмотрим четыре случая расположения (см. рис. 10—4).

Случай 1: вершины x_0 и y_0 не насыщены. Этот случай невозможен, так как W — полное паросочетание.

Случай 2: вершина x_0 не насыщена, вершина y_0 насыщена. Тогда существует дуга $w \in W$ с концом в y_0 . Поскольку $y_0 \notin Y^+$, дуга w должна быть помечена знаком „—“. Но, с другой стороны, по определению множества W^+ , она должна принадлежать этому множеству и поэтому быть помечена знаком „+“. Таким образом, и этот случай невозможен.

Случай 3: вершина x_0 насыщена, вершина y_0 не насыщена. Тогда существует дуга $w \in W$ с началом в x_0 . Поскольку $x_0 \notin X^-$, дуга w должна быть помечена знаком „+“, но, с другой стороны, $w \in W^-$, и поэтому она должна быть помечена знаком „—“. Таким образом, и этот случай невозможен.

Случай 4: вершины x_0 и y_0 насыщены. Рассмотрим дуги w_1 и w_2 , принадлежащие паросочетанию W , первая из которых имеет начало в x_0 , а вторая — конец в y_0 . Дуга w_1 должна быть помечена знаком „+“ а дуга w_2 — знаком „—“. Но тогда $w_2 \in \Delta w_1$, вопреки условию (4), по которому никакая дуга не должна идти из „+“ в „—“. Таким образом, и этот случай невозможен.

Так как все эти случаи невозможны, то не существует дуги (x_0, y_0) , у которой $x_0 \notin X^-$ и $y_0 \notin Y^+$. Следовательно, множество $C = X^- \cup Y^+$ является опорой.

В силу теоремы Кёнига для любого паросочетания W' и любой опоры C' имеем $|W'| \leq |C'|$; поскольку в нашем случае $|W| = |C|$, паросочетание W является наибольшим (а опора C — наименьшей).

Алгоритм для построения наибольшего паросочетания. Рассматриваем все вершины X и последовательно пробуем отобразить их в Y ; когда никакая вершина не может быть более отображена, имеем полное паросочетание W .

Образуем граф (W, Δ) и ищем путь, идущий из W^+ в W^- (различные способы для этого были указаны в гл. 7). Если такой путь существует, то заменяем паросочетание W паросочетанием W' , имеющим на один элемент больше, и начинаем все сначала.

Если такого пути нет, то паросочетание W — наибольшее.

Алгоритм для построения наименьшей опоры. Действуя, как выше, находим какое-нибудь наибольшее паросочетание W .

В графе (X, Y, Γ) помечаем дуги множества $\hat{\Delta}W^+$ знаком „+“, дуги множества $W \setminus \hat{\Delta}W^+$ — знаком „—“, наименьшая опора C будет состоять из начальных точек сильных дуг, помеченных знаком „—“, и конечных точек сильных дуг, помеченных знаком „+“.

Следует отметить, что таким же способом строится наибольшее внутренне устойчивое множество (при помощи перехода к дополнению).

Обобщение на бесконечный случай

Некоторые из предыдущих результатов распространяются на локально конечные простые графы.

Теорема 6. *В локально конечном простом графе (X, Y, Γ) паросочетание, отображающее X в Y , существует тогда и*

только тогда, когда

$$|\Gamma A| \geq |A| \quad (A \subset X, \quad |A| < \infty).$$

Эта теорема доказывается аналогично теореме Кёнига — Холла, но только здесь используется теорема о насыщении для бесконечных транспортных сетей (гл. 8).

Теорема 7. *В локально конечном простом графе (X, Y, Γ) наименьшее число вершин, которые надо удалить из X для того, чтобы можно было найти паросочетание, отображающее новое множество вершин X' в Y , равно*

$$\delta_0 = \max_{\substack{A \subset X \\ |A| < \infty}} (|A| - |\Gamma A|).$$

Когда δ_0 конечно, эта теорема доказывается, как и теорема Кёнига — Оре, с помощью рассмотрения пересечения A_0 множеств семейства

$$\mathcal{A} = \{A / |A| < \infty, \quad \delta(A) = \delta_0\};$$

заметим, что само $A_0 \in \mathcal{A}$. Когда δ_0 бесконечно, утверждение очевидно¹⁾.

Теорема 8. *Хроматический класс простого графа (X, Y, Γ) , конечный или бесконечный, есть*

$$m = \max \{ |\Gamma x|, \quad |\Gamma^{-1} y| / x \in X, \quad y \in Y \}.$$

При $m = \infty$ теорема очевидна; при $m < \infty$ она доказывается точно так же, как в случае конечных графов.

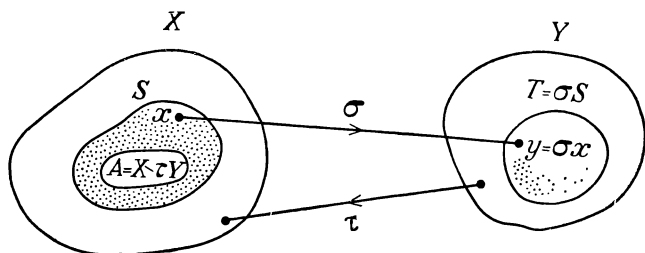
Приведем в заключение важную теорему, которая в различной форме встречается в самых разнообразных задачах и заслуживает доказательства только для бесконечных графов.

Теорема Бернштейна. *Если в бесконечном простом графе (X, Y, Γ) существуют паросочетание W , отображающее X в Y , и паросочетание W' , отображающее Y в X , то с помощью некоторого множества дуг $W_0 \subset W \cup W'$ можно также (взаимно-однозначно) отобразить X на Y .*

¹⁾ Эту теорему можно распространить на любые транспортные сети (Берж [1]); получаем: если граф некоторой транспортной сети регрессивно конечен и Γ^{-1} -конечен, то наименьшая общая величина, на которую надо уменьшить потребности, чтобы иметь возможность все их удовлетворить, равна

$$\delta_0 = \sup_{\substack{A \subset \Gamma^{-1} z \\ |A| < \infty}} [d(A) - F(A)].$$

Пусть σ — однозначное отображение, относящее каждой вершине $x \in X$ такую вершину $y \in Y$, что $(x, y) \in W$, а τ — однозначное отображение, относящее каждой вершине $y \in Y$ такую вершину $x \in X$,



Р и с. 10—5.

что $(x, y) \in W'$; положим $A = X \setminus \tau Y$ (рис. 10—5). Обозначим далее через $\mathcal{A} = \{A_i | i \in I\}$ семейство подмножеств множества X , удовлетворяющих условиям

- (1) $A_i \supset A$,
- (2) $\tau(\sigma A_i) \subset A_i$.

Это семейство \mathcal{A} непусто, ибо $X \in \mathcal{A}$; если положить $S = \bigcap_{i \in I} A_i$, то будем иметь

$$\begin{cases} S \supset A, \\ \tau(\sigma S) = \tau \sigma \bigcap_{i \in I} A_i \subset \bigcap_{i \in I} \tau \sigma A_i \subset \bigcap_{i \in I} A_i = S. \end{cases}$$

Поэтому $S \in \mathcal{A}$; то же верно и для множества $A \cup \tau(\sigma S) = S_0$, так как

$$\begin{cases} S_0 \supset A, \\ \tau(\sigma S_0) \subset \tau(\sigma S) \subset A \cup \tau \sigma S = S_0. \end{cases}$$

Значит, $S_0 \supset S$; с другой стороны,

$$S_0 = A \cup \tau(\sigma S) \subset A \cup S = S;$$

отсюда, наконец,

$$A \cup \tau(\sigma S) = S.$$

Рассмотрим теперь множество W_0 таких дуг (x, y) , что

$$\begin{aligned} y &= \sigma x, & \text{если } x \in S; \\ y &= \tau^{-1} x, & \text{если } x \notin S. \end{aligned}$$

Чтобы показать, что оно является паросочетанием, отображающим X на Y , достаточно убедиться в том, что если положить $\sigma S = T$, то будет

$$\tau(Y \setminus T) = X \setminus S.$$

Но это получается сразу, так как можно написать

$$\tau(Y \setminus T) = \tau Y \setminus A \setminus \tau T = \tau Y \setminus (A \cup \tau \sigma S) = \tau Y \setminus S = X \setminus S.$$

Ч. И Т. Д.

Пример (планиметрия). Рассмотрим плоское множество, и пусть X и Y — его проекции на две взаимно перпендикулярные оси координат. Допустим, что для любого $x \in X$ существуют две точки (x, y_1) и (x, y_2) множества, которые проектируются в x , и положим $\Gamma x = \{y_1, y_2\}$; кроме того, допустим, что для каждого $y \in Y$ имеются две точки множества, проектирующиеся в y .

Простой граф (X, Y, Γ) локально конечен, и каждой дуге этого графа отвечает некоторая точка множества (рис. 10 — 6).

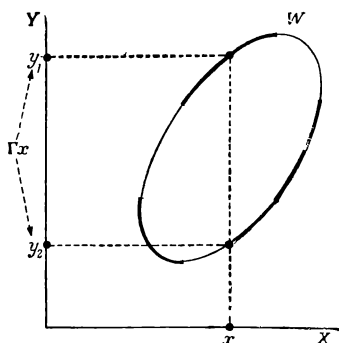
Далее, имеем

$$|\Gamma x| = 2 \quad (x \in X),$$

$$|\Gamma^{-1} y| = 2 \quad (y \in Y).$$

Поэтому из теоремы 6 следует, что можно отобразить X в Y и Y в X .

В силу теоремы Бернштейна существует паросочетание W , использующее все вершины X и все вершины Y ; следовательно, существует подмножество (на рисунке изображенное жирными линиями), обладающее свойством: всякая прямая, параллельная любой из координатных осей, пересекает это подмножество в единственной точке. Таким образом, доказана весьма тонкая с точки зрения логики теорема существования.



Р и с. 10—6.

Приложение к теории матриц

Квадратная матрица

$$P = (p_{ij}^i) = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 & \dots & p_j^1 & \dots & p_n^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & \dots & p_j^2 & \dots & p_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_1^n & p_2^n & \dots & p_j^n & \dots & p_n^n \end{pmatrix}$$

называется *бистохастической*, если

$$p_{ij}^i \geq 0 \quad (i \leq n, j \leq n);$$

$$\sum_i p_j^i = 1 \quad (j \leq n);$$

$$\sum_j p_j^i = 1 \quad (i \leq n).$$

Бистохастические матрицы играют важную роль в различных обобщениях выпуклых функций (см., например, Е. Т. Ф. М., гл. 8); Г. Биркгоф [2] показал, что основные свойства таких матриц выводятся из теоремы Кёнига — Холла.

Теорема 9. *Все члены определителя произвольной квадратной матрицы $A = (a_{ij}^i)$ порядка n равны нулю тогда и только тогда, когда в матрице A имеется подматрица с размерами $p \times (n - p + 1)$ (где $p \leq n$), все элементы которой равны нулю.*

В самом деле, положим $N = \{1, 2, \dots, n\}$ и для $i \in N$ положим

$$\Gamma i = \{j / a_{ij}^i \neq 0\}.$$

Тем самым образован простой граф (N, \bar{N}, Γ) .

Члены определителя имеют вид

$$\pm a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n},$$

и все они будут равны нулю тогда, когда не существует паросочетания, отображающего множество N в \bar{N} ; поэтому, в силу теоремы Кёнига — Холла, в этом и только в этом случае существует такое множество $I \subset N$, что

$$|I| > |\Gamma I|.$$

При этом в A найдется нулевая подматрица с размерами

$$|I| \times (n - |I| + 1).$$

Теорема 10. *Если матрица $P = (p_{ij}^i)$ — бистохастическая, то по крайней мере один член ее определителя отличен от нуля.*

В самом деле, допустим, что это не так и что, следовательно, матрицу P можно считать состоящей из четырех подматриц: $R = (r_{ij}^i)$, $S = (s_{ij}^i)$, $T = (t_{ij}^i)$ и нулевой матрицы O , как показано на рис. 10—7.

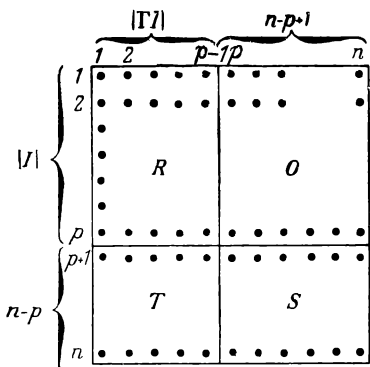


Рис. 10—7.

Имеем

$$\sum_i \sum_j s_j^i = n - p + 1.$$

Следовательно,

$$\sum_i \sum_j t_j^i = (n - p) - (n - p + 1) = -1.$$

Но это противоречит предположению о том, что $t_j^i \geq 0$.

Теорема 11 (Биркгоф — фон Нейман). *Всякая бистохастическая матрица является центром тяжести матриц подстановок.*

Надо показать, что если P — бистохастическая матрица, то существуют матрицы подстановок P_1, P_2, \dots, P_k (у которых в каждой строке и в каждом столбце ровно один элемент равен единице, а остальные элементы — нули) и такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, что

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k &\geq 0; \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k &= 1; \\ P &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k. \end{aligned}$$

Поскольку не все члены определителя матрицы $P = (a_j^i)$ равны нулю, рассмотрим член $a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n} \neq 0$, положим $\lambda_1 = \min \{a_1^{i_1}, a_2^{i_2}, \dots, a_n^{i_n}\}$ и обозначим через P_1 матрицу подстановки (i_1, i_2, \dots, i_n) ; положим, наконец,

$$P = \lambda_1 P_1 + R.$$

Число элементов, равных нулю, в матрице R больше, чем в матрице P ; если все члены определителя матрицы R равны нулю, то мы на этом остановимся, в противном же случае разложим матрицу R так же, как разложили P , и т. д.; в конце концов получим

$$P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k + R,$$

где R — такая матрица, все члены определителя которой равны нулю. Поэтому $R = 0$ (в противном случае нашлось бы такое $\lambda > 0$, что матрица λR была бы бистохастической, а все члены ее определителя равнялись бы нулю, что противоречит теореме 10). С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^n a_j^i = 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k.$$

Теорема доказана.

Отметим здесь эффективность того орудия, каким является теория графов; прямое доказательство теоремы Биркгофа — фон Неймана значительно длиннее.

Факторы

Гамильтоновы пути и гамильтоновы контуры

Путь $\mu = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ в графе (X, Γ) называется *гамильтоновым*, если он проходит через все вершины графа, притом только по одному разу; точно так же контур $\mu = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ *гамильтонов*, если он проходит через каждую вершину и притом по одному разу (с тем лишь исключением, что $x_0 = x_n$).

Часто бывает важно знать, есть ли у данного графа гамильтоновы пути или гамильтоновы контуры.

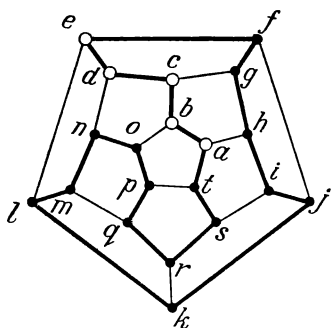


Рис. 11—1.

Пример 1. Замкнутое кругосветное путешествие (Гамильтон). Выберем на земном шаре 20 городов: a, b, c, \dots, t ; для простоты допустим, что эти города расположены в вершинах правильного додекаэдра (многогранника с 12 пятиугольными гранями и 20 вершинами), изображающего Землю. Наша цель — пройти через каждый город ровно один раз и

вернуться в исходный пункт, причем идти можно только по ребрам додекаэдра. Эта задача сводится к нахождению гамильтонова контура для симметрического графа, изображенного на рис. 11—1.

Заслуживает внимания способ решения, который применил Гамильтон. Путешественник, прибывший в граничную точку дуги, должен осуществить одну из трех возможностей: выбрать дугу, расположенную справа, — эту операцию обозначим через Π ; выбрать дугу, расположенную слева, — эту операцию обозначим через Λ ; остаться на месте — эту операцию обозначим через 1 . Далее определим *произведение* операций: $\Pi\Lambda$ есть операция, состоящая в том, чтобы сначала идти вправо, а потом влево; $\Lambda\Lambda\Pi$, или $\Lambda^2\Pi$ — операция, заключающаяся в том, чтобы два раза подряд идти влево, а затем один раз вправо; и т. п. Наконец, две операции равны, если обе они от одной и той же начальной точки приводят к одной и той же конечной. Произведение некоммутативно (например, $\Pi\Lambda \neq \Lambda\Pi$), но ассоциативно [например, $(\Lambda\Lambda)\Pi = \Lambda(\Lambda\Pi)$].

Имеют место формулы

$$\begin{aligned} \Pi^5 &= \mathcal{L}^5 = 1, \\ \Pi \mathcal{L}^2 \Pi &= \mathcal{L} \Pi \mathcal{L}, \\ \mathcal{L} \Pi^2 \mathcal{L} &= \Pi \mathcal{L} \Pi, \\ \Pi \mathcal{L}^3 \Pi &= \mathcal{L}^2, \\ \mathcal{L} \Pi^3 \mathcal{L} &= \Pi^2. \end{aligned}$$

Можно написать

$$\begin{aligned} 1 &= \Pi^5 = \Pi^2 \Pi^3 = (\mathcal{L} \Pi^3 \mathcal{L}) \Pi^3 = (\mathcal{L} \Pi^3)^2 = [\mathcal{L} (\mathcal{L} \Pi^3 \mathcal{L}) \Pi]^2 = \\ &= (\mathcal{L}^2 \Pi^3 \mathcal{L} \Pi)^2 = [\mathcal{L}^2 (\mathcal{L} \Pi^3 \mathcal{L}) \Pi \mathcal{L} \Pi]^2 = [\mathcal{L}^3 \Pi^3 \mathcal{L} \Pi \mathcal{L} \Pi]^2 = \\ &= \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{L} \Pi \Pi \Pi \mathcal{L} \Pi \mathcal{L} \Pi \mathcal{L} \Pi \mathcal{L} \Pi \Pi \Pi \mathcal{L} \Pi \mathcal{L} \Pi \Pi \Pi. \end{aligned}$$

Это произведение содержит 20 букв, причем из него невозможно выделить отрезок, тоже равный 1; поэтому последовательность сомножителей полученного произведения задает гамильтонов контур. Второй контур мы найдем, прочитав последовательность в обратном порядке; другие гамильтоновы контуры получаются в результате циклических перестановок обеих последовательностей.

Надо заметить, однако, что путешествие можно начинать в разных точках указанного кругового контура. Зафиксировав первые 5 городов (например, a, b, c, d, e), которые должен встретить путешественник, и ограничиваясь только выборами пути, начинающимися с ПЛП, Гамильтон нашел 4 решения:

Плплпллпллпллпллпллпллплл,
 плпллпллпллпллпллпллпллплл,
 плпллпллпллпллпллпллпллплл,
 пллпллпллпллпллпллпллпллплл.

Пример 2. Незамкнутое кругосветное путешествие. Если в предыдущем примере не требовать возвращения в исходный пункт, то число путешествий значительно возрастет: требуется найти все гамильтоновы пути графа, изображенного на рис. 11—1.

Ограничимся указанием тех гамильтоновых путей, которые задаются произведениями с первым множителем P ; все остальные гамильтоновы пути получаются отсюда, если поменять ролями буквы P и L .

<p> ППНПНПНПНПНПНПНПНПНПН ПНПНПНПНПНПНПНПНПНПН ПНПНПНПНПНПНПНПНПНПН ППНПНПНПНПНПНПНПНПНПН ПНПНПНПНПНПНПНПНПНПН ПНПНПНПНПНПНПНПНПНПН </p>	<p> ПНПНПНПНПНПНПНПНПНПН ПНПНПНПНПНПНПНПНПНПН </p>
---	---

пппппппппппппппппппп
 ппппппппппппппппппппп
 ппппппппппппппппппппп
 ппппппппппппппппппппп

пппппппппппппппппппп
 ппппппппппппппппппппп
 ппппппппппппппппппппп
 ппппппппппппппппппппп

пппппппппппппппппппп
 ппппппппппппппппппппп

пппппппппппппппппппп
 ппппппппппппппппппппп

пппппппппппппппппппп
 ппппппппппппппппппппп

пппппппппппппппппппп
 ппппппппппппппппппппп

пппппппппппппппппппп
 ппппппппппппппппппппп

(произведения, сгруппированные вместе, определяют равные операции)

Пример 3. *Ход шахматного коня* (Эйлер). Поставим задачу обойти конем шахматную доску так, чтобы побывать в каждой клетке ровно по одному разу. Эта задача, сводящаяся к нахождению гамильтонова пути некоторого симметрического графа, интересовала многих

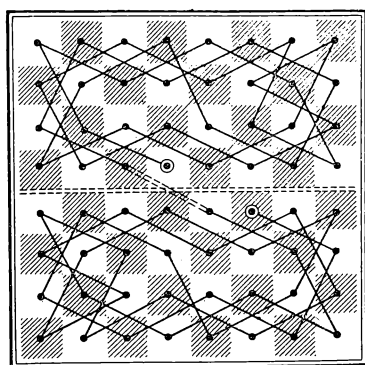
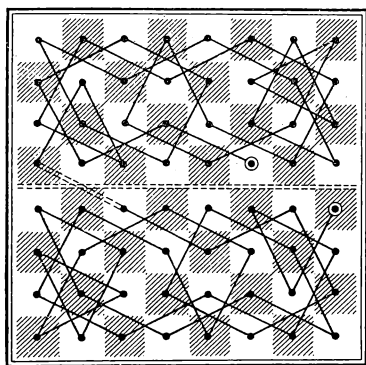


Рис. 11—2.

математиков, особенно Эйлера, де Муавра, Вандермонда и др. Мы не претендуем на то, чтобы дать все решения, — для этого применялось неисчислимо много способов. Правило, которое, видимо, оправдывается на практике, но еще не подтверждено теоретически, состоит в следующем: всякий раз ходим конем туда, откуда он угрожает наименьшему числу еще не пройденных клеток.

Другой способ состоит в нахождении маршрута по половинке доски, симметричном дублировании его и соединении обоих маршрутов (рис. 11—2). Это правило основано на специфике самой шахмат-

ной доски и не переносится на более общие графы. Читатель, интересующийся такими решениями, может обратиться к [1], [4], [6].

В исследовании операций нахождение гамильтонова пути служит ключом к многочисленным задачам на составление расписаний: точнее, когда ищется оптимальный порядок осуществления некоторого количества действий, эти действия изображают точками x_1, x_2, \dots, x_n и рисуют дугу (x_i, x_j) , если осуществление x_i перед x_j не влечет никаких потерь; искомое расписание задается, вообще говоря, одним из гамильтоновых путей графа.

Пример. Задача о книгах (Джонсон [5]). Печатник, который должен изготовить n книг, располагает двумя машинами: печатной и переплетной. Пусть a_k — время, необходимое для напечатания k -й книги, а b_k — время, требующееся для ее переплетения. Допустим, что книга должна поступать в переплет только после того, как она отпечатана, и что, следовательно, переплетная машина может более или менее долго простаивать без дела. В каком порядке должен работать печатник, чтобы закончить всю работу как можно скорее?

Как легко видеть, мы ничего не потеряем, если порядок поступления книг в обе машины предположим одним и тем же; оптимальный порядок будет, следовательно, определяться перестановкой (i_1, i_2, \dots, i_n) , или последовательностью операций: $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$. Кроме того, можно показать, что при оптимальном порядке i -я книга должна быть пущена в печать раньше j -й книги в том и только в том случае, если

$$\min \{a_i, b_j\} \leq \min \{a_j, b_i\}.$$

Всякий раз, когда это неравенство имеет место, мы рисуем дугу (x_i, x_j) ; в полученном графе ищем гамильтонов путь, и если этот путь единственный, то он и укажет нам искомый оптимальный порядок.

Теорема 1 (Кёниг). *В полном графе (любая пара вершин которого соединена хотя бы в одном направлении) всегда существует гамильтонов путь¹⁾.*

Пусть $\mu = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_p]$ — путь длины $p - 1$, все вершины которого различны, и пусть x — вершина, не принадлежащая μ ; покажем, что можно составить путь вида $\mu_k = [a_1, a_2, \dots, a_k, x, a_{k+1}, \dots, a_p]$.

В самом деле, допустим, что это не так, т. е. что не существует такого целого числа k , заключенного между 1 и p , что

$$(a_k, x) \in U, \quad (x, a_{k+1}) \in U.$$

¹⁾ Граф предполагается конечным. На бесконечные графы эта теорема не переносится, как показывают примеры графа рис. 3—2 (гл. 3), и графа, полученного из него изменением ориентации всех дуг. — *Прим. перев.*

Имеем, следовательно, для $1 \leq k \leq p$:

$$(a_k, x) \in U \Rightarrow (x, a_{k+1}) \notin U \Rightarrow (a_{k+1}, x) \in U.$$

Если не существует пути $\mu_0 = [x, a_1, a_2, \dots, a_p]$, то $(a_1, x) \in U$, значит $(a_2, x) \in U$, $(a_3, x) \in U, \dots, (a_p, x) \in U$, и путь $\mu_p = [a_1, a_2, \dots, a_p, x]$ существует, вопреки допущению.

Таким образом, можно шаг за шагом построить путь, содержащий все вершины графа ¹⁾.

Из этого результата вытекает, что всегда возможно упорядочить множество участников турнира таким образом, чтобы каждый предшествующий был победителем непосредственно следующего ²⁾.

Для выяснения того, существует ли гамильтонов путь в более общих случаях, как будет показано в следующем параграфе, надо обратиться к теории транспортных сетей.

Нахождение фактора

Назовем *фактором* графа (X, Γ) частичный граф (X, B) , в котором каждая вершина обладает полустепенями исхода и захода, равными 1; всякий гамильтонов контур является фактором, но обратное неверно, ибо фактор может состоять из нескольких контуров без общих вершин.

Теорема 2. *Необходимое и достаточное условие существования фактора у графа (X, Γ) состоит в том, чтобы $|S| \leq |\Gamma S|$ при всех $S \subset X$.*

Действительно, в силу теоремы Кёнига — Холла это условие выражает тот факт, что в простом графе (X, \bar{X}, Γ) ³⁾ существует паросочетание, отображающее X на \bar{X} .

Следствие. *Если граф (X, Γ) таков, что $|\Gamma x| = |\Gamma^{-1}x| = m$ для любой вершины x , то дуги этого графа можно распределить по m непересекающимся множествам W_1, W_2, \dots, W_m , каждое из которых образует фактор ⁴⁾.*

¹⁾ Этот результат близок к теореме Дирака [2], которая гласит: если (X, Γ) — симметрический связный граф без петель и если $|\Gamma x| \geq \frac{1}{2} |X|$ для всех $x \in X$, то существует гамильтонов контур.

²⁾ Если, конечно, ни одна из встреч не заканчивается ничьей. — Прим. ред.

³⁾ Здесь и в дальнейшем простой граф (X, \bar{X}, Γ) , соответствующий данному произвольному графу (X, Γ) , строится так: \bar{X} есть дубликат множества X , а $\bar{x}_j \in \Gamma x_i$ в (X, \bar{X}, Γ) тогда и только тогда, когда $x_j \in \Gamma x_i$ в (X, Γ) . — Прим. перев.

⁴⁾ Из этого следствия, в частности, вытекает существование фактора в задаче о „кругосветном путешествии“.

В самом деле, простой граф (X, \bar{X}, Γ) обладает свойством $|\Gamma x| = m$, $|\Gamma^{-1} \bar{x}| = m$; в силу следствия 3 из теоремы Кёнига — Холла, можно отобразить X на \bar{X} и тем самым определить W_1 ; в частичном графе, остающемся после удаления дуг W_1 , можно отобразить X на \bar{X} и тем самым определить W_2 ; и т. д.¹⁾

Отыскание фактора является несложным делом, поскольку это есть задача о наибольшем потоке; а метод нахождения гамильтонова контура состоит в нахождении всех факторов графа и сохранении только тех из них, которые состоят из единственного контура. Чаше стараются „склеить“ друг с другом различные контуры фактора.

Пример. Снова рассмотрим задачу о шахматном коне и найдем его маршрут, который представляет собой гамильтонов контур. Благодаря симметрии шахматной доски непосредственно получается фактор, указанный на рис. 11 — 3 (где клетки, помеченные буквой „a“, образуют один контур, клетки, помеченные буквой „b“, — другой контур,

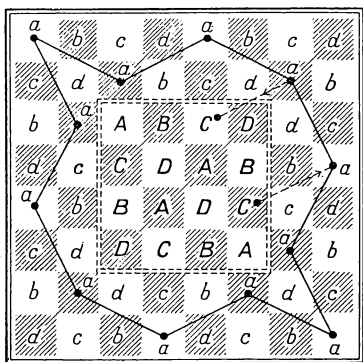


Рис. 11—3.

где клетки, помеченные буквой „a“, образуют один контур, клетки, помеченные буквой „b“, — другой контур,

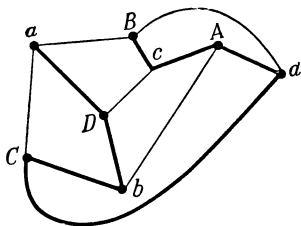


Рис. 11—4.

и т. д.). Два контура можно объединить тогда и только тогда, когда две последовательные вершины одного соответственно смежны с двумя последовательными вершинами другого. Так, можно соединить „a“ и „C“ (например, двумя дугами, которые на рисунке показаны пунктиром), „a“ и „B“ и т. д. Различные возможные соединения показаны при помощи вспомогательного графа, изображенного на рис. 11—4, содержащего ребра $[a, C]$, $[a, B]$ и т.д.; вспомогательный граф имеет очевидный гамильтонов путь $aDbCbCdAcB$, и, соединяя последовательно в этом порядке различные контуры, мы получим, как можно проверить, искомый гамильтонов контур.

¹⁾ Это следствие, вместе с теоремой 2, очевидно, сохраняет силу для любых локально конечных графов (см. теорему 6 гл. 10). Дальнейшие результаты настоящей главы тоже можно (по крайней мере частично) перенести на бесконечные графы. — *Прим. перев.*

Предыдущие результаты могут быть распространены следующим замечательным образом; для данного графа (X, Γ) назовем *рассечением* такую совокупность элементарных путей или элементарных контуров, что:

1° два пути рассека не имеют общих вершин;

2° каждая вершина графа принадлежит одному из путей рассека.

Среди различных путей рассека будем различать: элементарные контуры — их обозначаем символом $\alpha^i = [a_0^i, a_1^i, \dots, a_p^i = a_0^i]$; элементарные пути длины $\neq 0$ — их обозначаем символом $\beta^j = [b_0^j, b_1^j, \dots, b_q^j]$; пути длины 0, имеющие вид $\gamma^k = \{c^k\}$. Обозначим через A^i множество вершин, принадлежащих контуру α^i , через B^j — множество вершин, принадлежащих пути β^j , через C^k — множество $\{c^k\}$. Наконец, положим:

$$n(\alpha^i) = 0,$$

$$n(\beta^j) = 1,$$

$$n(\gamma^k) = 1.$$

По определению, *величина* рассека $\mathcal{A} = (\alpha^1, \alpha^2, \dots; \beta^1, \beta^2, \dots; \gamma^1, \gamma^2, \dots)$ есть

$$\lambda(\mathcal{A}) = \sum_i n(\alpha^i) + \sum_j n(\beta^j) + \sum_k n(\gamma^k).$$

Фактор представляет собой рассечение величины 0. Поставим целью найти наименьшую величину рассечений заданного графа.

Теорема 3. *Наименьшая величина рассечения графа (X, Γ) равна дефициту этого графа, т. е.*

$$\delta_0 = \max_{S \subset X} (|S| - |\Gamma S|).$$

В самом деле, рассмотрим рассечение $\mathcal{A} = (\alpha^1, \alpha^2, \dots; \beta^1, \beta^2, \dots; \gamma^1, \gamma^2, \dots)$ и образуем простой граф (X, \bar{X}, Γ) . Контур α^i в простом графе отвечает паросочетание, содержащее $|A^i|$ дуг; пути β^j отвечает паросочетание, содержащее $|B^j| - 1$ дуг. Объединяя все эти дуги, получим паросочетание W с числом дуг

$$|W| = \sum_i |A^i| + \sum_j (|B^j| - 1).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} n &= \sum_i |A^i| + \sum_j |B^j| + \sum_k |C^k| = \sum_i |A^i| + \\ &+ \sum_j (|B^j| - 1) + \lambda(\mathcal{A}) = |W| + \lambda(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Это соответствие между паросочетаниями W и расщеплениями взаимно однозначно; следовательно, принимая во внимание теорему 4 (гл. 10), будем иметь

$$\min \lambda(\mathcal{A}) = n - \max |W| = n - (n - \delta_0) = \delta_0.$$

Следствие 1. Если существует гамильтонов контур, то $\delta_0 = 0$.
(Непосредственно.)

Следствие 2. Если существует гамильтонов путь, то $0 \leq \delta_0 \leq 1$.
(Непосредственно.)

Следствие 3. Если граф (X, Γ) не содержит контуров, то его дефицит δ_0 равен наименьшему числу попарно непересекающихся элементарных путей (отдельная вершина рассматривается при этом как путь длины 0).
(Непосредственно.)

Следствие 4. Если граф не содержит контуров, то необходимое и достаточное условие существования гамильтонова пути состоит в том, чтобы $\delta_0 = 1$.
(Непосредственно.)

ПРИМЕР. Найдем гамильтонов путь в графе, изображенном на рис. 11—5, тремя разными способами.

1° Поскольку граф (X, Γ) — полный, существование гамильтонова пути обеспечено (теорема 1); для его нахождения можно действовать

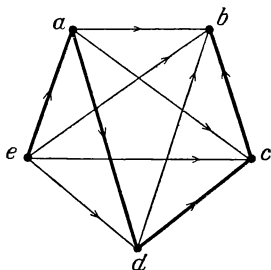


Рис. 11—5.

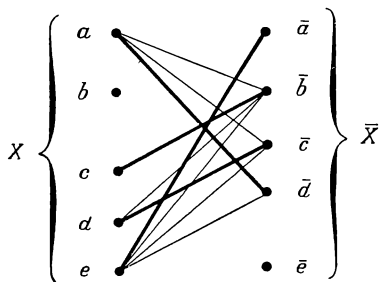


Рис. 11—6.

как при доказательстве теоремы 1; например, после того как найден путь $eacsb$, получаем решение $eadcbs$.

2° Граф (X, Γ) , очевидно, не содержит контуров, и его дефицит

$$\delta_0 = \max_{S \subset X} (|S| - |\Gamma S|) = |\{b\}| - |\Gamma b| = 1.$$

Значит, ввиду следствия 4 существует гамильтонов путь, который получается отысканием наибольшего паросочетания графа (X, \bar{X}, Γ) , изображенного на рис. 11—6, откуда имеем решение $eadcb$.

3° Граф (X, Γ) — транзитивный, т. е.

$$z \in \Gamma y, y \in \Gamma x \Rightarrow z \in \Gamma x.$$

Значит, полустепени исхода вершин, расположенных в порядке гамильтонова пути, убывают. Эти полустепени суть

$$|\Gamma a| = 3, \quad |\Gamma b| = 0, \quad |\Gamma c| = 1, \quad |\Gamma d| = 2, \quad |\Gamma e| = 4.$$

Отсюда получаем путь $eadcb$.

Нахождение частичного графа с заданными полустепенями

Непосредственным обобщением задачи отыскания фактора является следующая задача: дан граф (X, Γ) , построить его частичный граф

с заданными полустепенями вершин. Если $A \subset X, B \subset X$, то обозначим через $m(A, B)$ количество тех дуг, которые исходят из A и заходят в B .

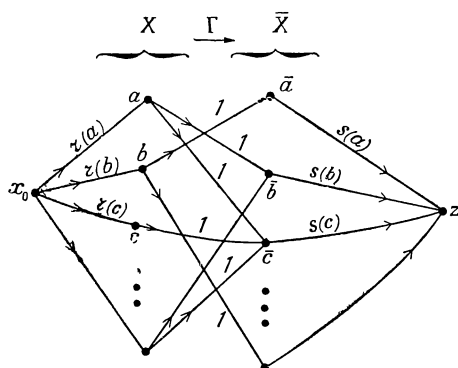


Рис. 11—7.

Теорема 4. Пусть дан граф (X, Γ) и (для $x \in X$) целые числа $r(x)$ и $s(x)$. Для того чтобы существовал такой частичный граф (X, Δ) , что $|\Delta x| = r(x)$, $|\Delta^{-1} x| = s(x)$ (при всех $x \in X$), необходимо и достаточно, чтобы

$$(1) \quad \sum_{x \in X} r(x) = \sum_{x \in X} s(x),$$

$$(2) \quad \sum_{x \in X} \min \{r(x), |\Gamma x \cap S|\} \geq \sum_{x \in S} s(x) \quad (S \subset X).$$

В самом деле, условие (2) выражает тот факт, что для транспортной сети, изображенной на рис. 11—7, существует поток, насыщающий выходные дуги, т. е. $F(S) \geq d(S)$ для всех $S \subset \bar{X}$.

При $r(x) = s(x) = 1$ получается условие существования фактора, при $\Gamma x = X$ — теорема о полустепенях.

Обобщение 1. Пусть (A_1, A_2, \dots, A_p) и (B_1, B_2, \dots, B_q) — два разбиения множества вершин графа (X, Γ) ; r_1, r_2, \dots, r_p ,

s_1, s_2, \dots, s_q — целые неотрицательные числа. Частичный граф (X, Δ) , удовлетворяющий условиям

$$\sum_{x \in A_k} |\Delta x| = r_k, \quad \sum_{x \in B_h} |\Delta^{-1} x| = s_h \quad (k \leq p, h \leq q),$$

существует тогда и только тогда, когда

$$(1) \quad \sum_{k=1}^p r_k = \sum_{h=1}^q s_h,$$

$$(2) \quad m(X \setminus A, B) \geq \sum_{h \in J} s_h - \sum_{k \in I} r_k$$

$$(I \subset \{1, 2, \dots, p\}; J \subset \{1, 2, \dots, q\}; A \subset \bigcup_{i \in I} A_i; B \supset \bigcup_{j \in J} B_j).$$

Для транспортной сети, изображенной на рис. 11—8, поток, насыщающий выходные дуги, будет существовать, когда при любом мно-

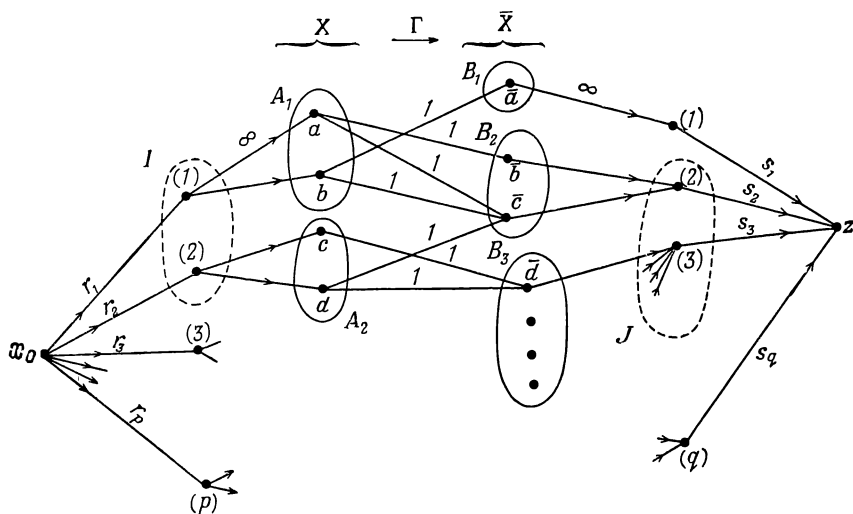


Рис. 11—8.

жестве $S = I \cup A \cup B \cup J$, где $I \subset \{1, 2, \dots, p\}$, $J \subset \{1, 2, \dots, q\}$, $A \subset X$, $B \subset \bar{X}$, имеем

$$c(U_S^-) \geq d(S).$$

Но это условие в точности совпадает с (2).

Обобщение 2. Рассмотрим для каждой вершины x графа (X, Γ) такие целые числа $r(x), r'(x), s(x), s'(x)$, что $0 \leq r(x) \leq r'(x)$, $0 \leq s(x) \leq s'(x)$. Для того чтобы существовал частичный граф (X, Δ) , удовлетворяющий условиям

$$r(x) \leq |\Delta x| \leq r'(x), \quad s(x) \leq |\Delta^{-1} x| \leq s'(x),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$(1) \quad m(X \setminus A, B) + \sum_{a \in A} r'(a) \geq \sum_{b \in B} s(b),$$

$$(2) \quad m(X \setminus A, B) + \sum_{y \notin B} s'(y) \geq \sum_{x \notin A} r(x).$$

Достаточно выяснить, существует ли поток по сети, изображенной на рис. 11—7, совместимый с множествами $[r(x), r'(x)]$, $[0, 1]$, $[s(x), s'(x)]$.

Применение теоремы 2 гл. 8 дает

$$c(U_S^-) \geq b(U_S^+) \quad (S \in \mathcal{A}).$$

Беря множества $S = A \cup B$, где $A \subset X$, $B \subset \bar{X}$, получаем (1); беря множества $S = A \cup B \cup \{x_0\} \cup \{z\}$, получаем (2).

Центры графа

Центры

Пусть (X, Γ) — граф (конечный или бесконечный); *отклонением* $d(x, y)$ его вершины x от вершины y называется длина кратчайшего пути из x в y .

При $x = y$ полагаем, по определению, $d(x, x) = 0$; при $y \notin \hat{\Gamma}x$ полагаем $d(x, y) = \infty$.

Теорема 1. $d(x, y)$ удовлетворяет условиям:

- (1) $d(x, x) = 0$,
- (2) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Кроме того, если граф симметрический, то

- (3) $d(x, y) = d(y, x)$.
- (Непосредственно.)

Если граф симметрический, то функция $d(x, y)$, удовлетворяющая условиям (1), (2), (3), является *расстоянием* в топологическом смысле слова.

Назовем *отклоненностью* вершины x число

$$e(x) = \max_{y \in X} d(x, y).$$

Если наименьшая из отклоненностей является конечным числом, то вершина, в которой этот минимум достигается, носит название *центра* графа; вершина с наибольшей отклоненностью называется *периферийной точкой* графа; граф может иметь много центров и может не иметь их совсем.

Пример. Первая сеть коммуникаций для почтовых голубей (1870) представлена графом, изображенным на рис. 12—1.

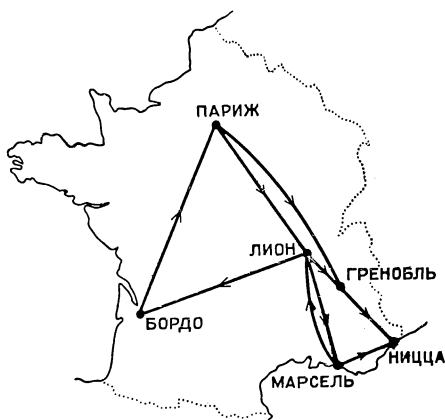


Рис. 12—1.

Центром здесь служит каждый город, который может сообщаться с остальными без использования большого количества передач (значит, в кратчайшее время); Париж и Лион являются центрами (с отклоненностью, равной двум), Гренобль и Ницца — периферийными точками (с бесконечной отклоненностью).

Радиус

Если граф имеет центр x_0 , то отклоненность $e(x_0)$ называется радиусом графа; для радиуса ρ имеем, следовательно, формулу

$$\rho = \min_{x \in X} e(x).$$

Если у графа нет центров, то полагаем $\rho = \infty$.

Теорема 2. Если в конечном графе (X, Γ) положить $|X| = n$, $\max |\Gamma x| = p$ и если $1 < p < \infty$, то радиус ρ графа удовлетворяет условию

$$\rho \geq \frac{\log(np - n + 1)}{\log p} - 1.$$

При $\rho = \infty$ теорема очевидна; допустим, что $\rho < \infty$ и что, следовательно, граф имеет центр x_0 . Число вершин, от которых вершина x_0 отклонена на 1, не превосходит p ; число вершин, от которых x_0 отклонена на 2, не превосходит p^2 ; и т. д. Следовательно,

$$n \leq 1 + p + p^2 + \dots + p^\rho = \frac{p^{\rho+1} - 1}{p - 1}.$$

или

$$n(p - 1) + 1 \leq p^{\rho+1},$$

или

$$\log(np - n + 1) \leq (\rho + 1) \log p.$$

Отсюда и получается требуемая формула.

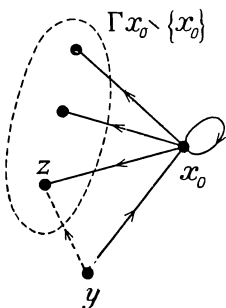


Рис. 12—2.

Теорема 3. Если конечный граф (X, Γ) является полным (т. е. если любые две его вершины соединены хотя бы в одном направлении), то его радиус $\rho \leq 2$, а всякая вершина x_0 , для которой

$$|\Gamma x_0 \setminus \{x_0\}| = \max_{x \in X} |\Gamma x \setminus \{x\}|,$$

служит центром.

При $\rho = 1$ теорема очевидна.

Если $\rho > 1$, то рассмотрим какую-нибудь вершину x_0 , в которой величина $|\Gamma x_0 \setminus \{x_0\}|$ принимает наибольшее значение (такая вершина существует, так как граф Γ -ограничен). Поскольку $e(x) \geq 2$ при

всех x , то, показав, что $e(x_0) = 2$, мы тем самым сразу докажем, что x_0 — центр и что

$$\rho = 2.$$

Рассуждая от противного, допустим, что $e(x_0) > 2$; тогда найдется такая вершина $y \neq x_0$, которая не может быть достигнута из x_0 ни по пути длины 1, ни по пути длины 2. (См. рис. 12—2). Так как $y \notin \Gamma x_0$, то

$$x_0 \in \Gamma y.$$

Далее, если z — вершина из $\Gamma x_0 \setminus \{x_0\}$, то $y \notin \Gamma z$ (иначе из x_0 в y вел бы путь длины 2), поэтому $z \in \Gamma y$ и

$$z \in \Gamma y \setminus \{y\}.$$

Отсюда

$$\Gamma x_0 \setminus \{x_0\} \subset \Gamma y \setminus \{y\}.$$

Поскольку $x_0 \in \Gamma y \setminus \{y\}$, имеет место строгое включение:

$$\Gamma x_0 \setminus \{x_0\} \subset \subset \Gamma y \setminus \{y\}.$$

Следовательно,

$$|\Gamma y \setminus \{y\}| > |\Gamma x_0 \setminus \{x_0\}| = \max_{x \in X} |\Gamma x \setminus \{x\}|.$$

Мы пришли, таким образом, к противоречию.

Следствие. Если конечный граф (X, Γ) является тотальным (т. е. если каждая пара его вершин соединена путем по крайней мере в одном направлении), то он имеет центр.

В самом деле, граф $(X, \hat{\Gamma})$ — полный и, значит, в силу теоремы 3 имеет центр x ; в графе (X, Γ) точку x можно соединить с любой другой вершиной путем конечной длины.

Следовательно, этот граф имеет радиус $\rho \leq e(x) < \infty$ и обладает центром.

Пример. Все участники турнира должны провести одно и то же количество встреч; как организовать встречи, чтобы наиболее убедительно определить победителя?

Обозначим через X множество участников и положим $(x, y) \in U$, если игрок x побеждает игрока y ; получим полный граф (X, Γ) , например, граф, изображенный на рис. 12—3. Отображение Γ не транзитивно: x_1 побеждает x_3 , а x_3 побеждает x_2 , но x_1 не побеждает x_2 ; в этом смысле решения, даваемые так называемыми „отборочными“ турнирами¹⁾, очень плохи. Чувство справедливости, еще более неопределенное, побуждает нас считать победителями тех участников,

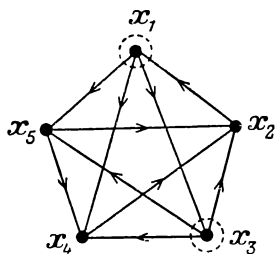


Рис. 12—3.

¹⁾ Или турнирами, проводимыми по „олимпийской системе“. — Прим. ред.

которые соответствуют центрам графа (X, Γ) , если последние существуют; в данном случае, поскольку граф полный, существование центра обеспечено (теорема 3), и мы находим двух победителей: x_1 и x_3 . Этот подход, самый простой, может быть подвергнут критике: не должен ли победитель x_1 , одержавший верх над другим победителем x_3 , один занимать первое место? заслужил ли последнее место игрок x_2 , победивший чемпиона x_1 ? В дальнейшем (гл. 14) мы покажем, как учесть все эти обстоятельства.

Турнир с m встречами определяет частичный граф (X, Γ) , имеющий ровно m ребер; если этот частичный граф обладает центрами, то соответствующих участников можно рассматривать как ожидаемых победителей турнира.

Диаметр сильно связного графа

Общие свойства сильно связных графов без петель

Пусть $G = (X, U)$ — сильно связный граф без петель, удовлетворяющий условию $|X| > 1$; каждая его вершина служит началом некоторого пути, а также концом некоторого пути, так что для любой вершины $x \in X$ имеются по крайней мере две дуги, инцидентные x : дуга, исходящая из x , и дуга, заходящая в x . Вершины, инцидентные более чем двум дугам, называются *узлами*, а прочие вершины — *антиузлами*. Путь, в котором узлами являются только первая и последняя вершины, называется *ветвью*. Сильно связный граф без петель и с единственным узлом называется *розеткой* и имеет весьма простую структуру: различные ветви начинаются и оканчиваются в единственном узле.

Если граф G сильно связан, но утрачивает это свойство после удаления любого ребра, то он называется *минимально связным*; очевидно, розетка — минимально связный граф. Говорят, что множество $A \subset X$ подвергается *стягиванию*, если все дуги между точками A опускаются, а все точки A отождествляются. При этом получается p -граф, который, вообще говоря (если $p \neq 1$), не является графом. Следующими результатами мы обязаны главным образом Кристи, Льюсу и Мейси¹⁾.

Теорема 1. Пусть в минимально связном графе G множество $A \subset X$ вершин порождает сильно связный подграф; тогда в результате стягивания A получается минимально связный граф.

1° Покажем, что стягивание A приводит к 1-графу. Действительно, иначе существовали бы вершина $x \notin A$ и две вершины $a, a' \in A$, такие, что $(x, a), (x, a') \in U$ [или же, что не меняет доказательства, $(a, x), (a', x) \in U$]. Удалив одну из этих двух дуг, мы

¹⁾ См. [2]. Эти результаты получаются более просто из теоремы Руа [4], которая нам стала известна, лишь когда книга была уже сверстана, и которая гласит: граф (X, Γ) сильно связан тогда и только тогда, когда не существует подмножества $A \subset \subset X$ (в строгом смысле), содержащего свой образ ΓA ; доказательство опирается на теорию транспортных сетей.

получили бы все еще сильно связный граф, т. е. граф G не был бы минимально связным.

2° Покажем, что стягивание A приводит к минимально связному графу. В самом деле, в результате стягивания получается сильно связный граф, но если из него удалить произвольную дугу u , то оставшийся граф уже не будет сильно связным, поскольку не может быть сильно связным граф $(X, U \setminus \{u\})$.

Теорема 2. Пусть G — минимально связный граф, а G' — граф, полученный из G стягиванием элементарного контура; тогда цикломатические числа обоих графов связаны соотношением

$$\nu(G) = \nu(G') + 1.$$

Контур элементарен, если он не пересекает сам себя; так как G минимально связан, то стягивание одного элементарного контура μ_0 не уничтожает других контуров, поэтому наибольшее число независимых контуров уменьшается на 1. Графы G и G' сильно связны (теорема 1), они имеют соответственно $\nu(G)$ и $\nu(G')$ независимых контуров (теорема 3 гл. 4); отсюда и следует доказываемое равенство.

Теорема 3. Минимально связный граф G имеет по крайней мере два антиузла.

Имеем $\nu(G) \geq 1$, так как по крайней мере один контур существует, в силу предположения о том, что $|X| > 1$; в случае $\nu(G) = 1$ теорема очевидна, так как тогда G состоит из одного элементарного контура.

Допустим, что теорема верна для графов с цикломатическим числом $k - 1$, и докажем ее для произвольного графа G , у которого $\nu(G) = k$.

Рассмотрим элементарный контур μ графа G ; предположим μ таким, что либо его стягивание дает узел, либо $l(\mu) \geq 3$. Такой контур μ всегда существует, потому что всякий контур длины 2, дающий после стягивания антиузел, легко заменить элементарным контуром длины ≥ 3 (проходящим через обе вершины μ и две вершины, инцидентные μ).

Стянем контур μ ; тогда получится минимально связный граф G' , у которого $\nu(G') = k - 1$; согласно предположению, G' имеет два антиузла: x_0 и y_0 ; хотя бы одна из этих вершин, скажем x_0 , является образом μ (в противном случае утверждение уже было бы доказано). Значит, в графе G имеем $l(\mu) \geq 3$, поэтому путь μ сам содержит по крайней мере один антиузел z_0 , и граф G имеет уже два антиузла: y_0 и z_0 .

Следствие [1]. Если сильно связный граф G без петель имеет хотя бы один узел, то существует ветвь, дуги и анти-

узлы которой можно удалить без нарушения сильной связности графа G .

Действительно, если граф имеет единственный узел, то он — розетка и можно удалить любую ветвь.

Если граф имеет несколько узлов, то рассмотрим граф \bar{G} , вершинами которого служат узлы G , а дугами — ветви G .

Граф \bar{G} сильно связан, но не минимально связан, поскольку у него нет антиузлов (см. теорему 3); следовательно, из него можно удалить некоторую дугу без нарушения сильной связности.

Ч. И Т. Д.

Кратчайший путь из x в y , где $x, y \in X$, $x \neq y$, называется *трассой* от x до y ; в сильно связанном графе от любой точки до любой другой существует трасса; если u — дуга, исходящая из x , то обозначим через $S(u)$ множество вершин z , обладающих тем свойством, что от x можно дойти до z по трассе с начальной дугой u .

Пример. Рассмотрим граф почтовых коммуникаций: X — множество городов; $(x, y) \in U$, если корреспонденция может доставляться непосредственно из x в y .

Для почтового служащего в x множество $S(x, y)$ представляет список тех мест назначения, в которые письма нужно доставлять через y .

Нижеследующие теоремы доказаны Брэттоном [1].

Теорема 4. *Трасса есть элементарный путь.*

По определению, путь из x в y , не являющийся элементарным, проходит не менее двух раз через какую-либо из своих вершин, а такой путь всегда можно заменить более коротким.

Теорема 5. *Если $\mu = [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_h]$ — трасса, то $\mu[x_i, x_j] = [x_i, \dots, x_j]$ — тоже трасса.*

(Очевидно.)

Теорема 6. *Путь μ является трассой тогда и только тогда, когда*

$$\bigcap_{u \in \mu} S(u) \neq \emptyset.$$

Если μ — трасса от x к y , то пересечение всех $S(u)$ содержит y и поэтому не пусто.

Обратно, пусть существует вершина y , принадлежащая всем $S(u)$, где $u \in \mu = [x_1, x_2, \dots, x_h]$.

Если $d(x_1, y) = p$, то $d(x_2, y) = p - 1$, так как $y \in S(x_1, x_2)$; по аналогичной причине $d(x_3, y) = p - 2$ и т. д. Значит, μ есть отрезок некоторой трассы, идущей из x_1 в y , и, в силу теоремы 5, сам является трассой.

Следствие. Если μ — контур, то

$$\bigcap_{u \in \mu} S(u) = \emptyset.$$

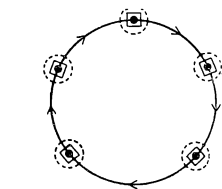
(Непосредственно.)

Диаметр

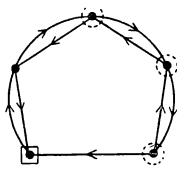
Пусть G — конечный сильно связный граф без петель; назовем *диаметром* этого графа длину δ его наибольшей трассы; иными словами,

$$\delta = \max_{x, y} d(x, y).$$

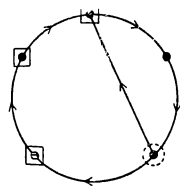
ПРИМЕР. Для каждого из сильно связных графов, изображенных на рис. 13—1 (с $n=5$), указаны количество дуг m , радиус ρ , диа-



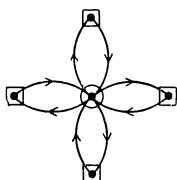
Элементарный контур
 $m=5, \rho=4, \delta=4$



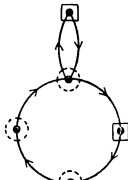
Элементарный цикл
 $m=9, \rho=2, \delta=4$



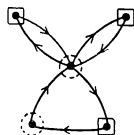
$m=6, \rho=2, \delta=4$



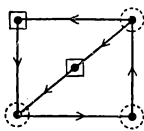
Симметричная розетка
 $m=8, \rho=1, \delta=2$



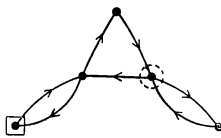
Розетка с симметричной ветвью
 $m=6, \rho=3, \delta=4$



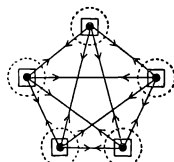
Розетка с двумя симметричными ветвями
 $m=7, \rho=2, \delta=3$



$m=6, \rho=3, \delta=4$



$m=7, \rho=2, \delta=4$



Полный симметричный граф
 $m=20, \rho=1, \delta=1$

Р и с. 13—1.

метр δ ; центры обведены кружком, периферийные точки — квадратиком.

Заметим, что при $n=5$ всегда $\delta + m \geq 9$. Полный симметрический граф — единственный, обладающий диаметром 1.

Для конечного графа $\delta < \infty$; столь же очевидно, что радиус не превосходит диаметра, то есть $\rho \leq \delta$. В графе, который изображает возможности непосредственной передачи сообщений между различными членами организации, диаметр играет важную роль, поскольку некоторые сообщения будут доходить до места назначения только через δ инстанций; если предположить, что при каждой передаче сообщение в какой-то мере искажается, то следует выбирать граф с возможно меньшим диаметром. Кроме того, в целях экономии вообще желательно сводить к минимуму количество дуг.

Теорема 7. В сильно связном графе без петель

- $$\begin{aligned} (1) \quad & n \leq m, \\ (2) \quad & m \leq n(n-1), \\ (3) \quad & \delta \leq n-1. \end{aligned}$$

Действительно, неравенство (1) имеет место потому, что каждой вершине x можно отнести по крайней мере одну дугу, исходящую из x .

Неравенство (2) справедливо потому, что m не может превышать числа размещений из n вершин по две.

Наконец, неравенство (3) справедливо по той причине, что самая длинная трасса содержит $\delta + 1$ различных вершин, откуда $n \geq \delta + 1$.

Замечание. Для элементарного контура в (1) и (3) имеет место равенство; для полного симметрического графа достигается равенство в (2). Это говорит о том, что никакое из неравенств (1), (2), (3), взятое отдельно, не может быть улучшено.

Напротив, систему неравенств можно улучшить: существуют числа n, m, δ , удовлетворяющие условиям (1), (2), (3) и такие, что не может быть сильно связного графа $G = (X, U)$, для которого $|X| = n, |U| = m, \delta(G) = \delta$. Эта невозможность проявляется всякий раз, когда число δ выбрано слишком малым¹⁾.

В связи с этим введем нижнюю грань $f(m, n)$ диаметров сильно связных графов без петель, с n вершинами и m дугами и пополним систему неравенств еще одним:

$$(4) \quad \delta \geq f(m, n).$$

¹⁾ Например, Льюс [2] доказал, что если числа $n, m, \delta > 1$ удовлетворяют условиям (1), (2), (3) и если

$$(4') \quad \delta \geq 2n - m,$$

то существует сильно связный граф G без петель, для которого $|X| = n, |U| = m, \delta(G) = \delta$. К сожалению, имеется много графов, для которых неравенство (4') не выполняется (в частности, графы, изображенные на рис. 13—2 и 13—3).

Хотя это число $f(m, n)$ не удалось еще определить, к нему можно подойти довольно близко; с этой целью докажем следующую теорему.

Теорема 8. Пусть q — частное, r — остаток от деления $n - 1$ на $\nu = m - n + 1$. Положим

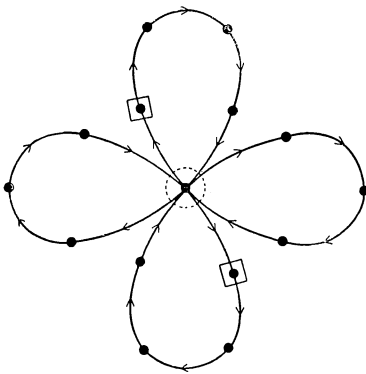
$$\delta(m, n) = \begin{cases} 2q & \text{при } r = 0, \\ 2q + 1 & \text{при } r = 1, \\ 2q + 2 & \text{при } r \geq 2. \end{cases}$$

Если G — розетка, то n , m и δ удовлетворяют неравенствам (1), (2) предыдущей теоремы и, кроме того, условию

$$(3') \quad 1 < \delta(m, n) \leq \delta \leq 2n - m.$$

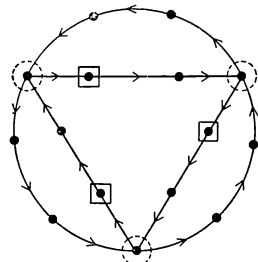
Наоборот, если n , m , δ — числа, удовлетворяющие условиям (1), (2), (3'), то существует такая розетка $G = (X, U)$, что $|X| = n$, $|U| = m$, $\delta(G) = \delta$.

Достаточно заметить, что розетка с n вершинами и m дугами имеет ровно $\nu = m - n + 1$ ветвей и что можно переносить антиузел с одной ветви на другую без изменения числа дуг. Помещая по одному антиузлу на



$n=15, m=18, \delta=8, \rho=4$

Рис. 13—2.



$n=15, m=18, \delta=7, \rho=5$

Рис. 13—3.

каждую ветвь, кроме последней, где разместим $n - \nu$ антиузлов, мы получим наибольший диаметр

$$\delta_0 = n - \nu + 1 = n - (m - n + 1) + 1 = 2n - m.$$

Наименьший диаметр δ_1 достигается распределением, насколько возможно равномерным, $n - 1$ антиузлов по ν ветвям, что дает нам $\delta_1 = \delta(m, n)$.

Гипотеза Брэттона. Поставим целью при фиксированных m и n определить сильно связный граф без петель, с m дугами и n

вершинами, обладающий наименьшим возможным диаметром. Брэттон [1] мог констатировать, что графы с диаметром меньшим, чем $\delta(t, n)$, редки. Однако такие графы существуют: так, граф, изображенный на рис. 13—3, имеет то же количество вершин и дуг, что и розетка, изображенная на рис. 13—2, и в то же время диаметр меньший на единицу.

В графах такого типа, как на рис. 13—3, каждая ветвь является трассой между двумя узлами и все ветви имеют одну и ту же длину, равную нечетному числу ≥ 3 . Можно показать [1], что такие графы ¹⁾ всегда имеют диаметр $\delta(t, n) - 1$ и что они — единственные связные графы со следующими свойствами:

- 1° их диаметр меньше $\delta(t, n)$;
- 2° каждая ветвь является трассой;
- 3° для каждой пары узлов существует ровно одна ветвь, идущая из одного в другой.

Эти результаты делают правдоподобным следующее предположение, еще не доказанное: у *всякого сильно связного графа без петель, с t дугами и n вершинами, диаметр больше или равен $\delta(t, n) - 1$.*

¹⁾ С тремя узлами. — *Прим. ред.*

Матрица смежности графа

Применение обычных матричных операций

Рассмотрим здесь для большей общности p -граф $G = (X, U)$, и пусть x_1, x_2, \dots, x_n — его вершины. Обозначим через a_j^i число дуг U , идущих из x_i в x_j . Квадратная матрица (a_j^i) с n строками и n столбцами называется *матрицей смежности* p -графа G ; a_j^i , как обычно, означает элемент, стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца; $\mathbf{a}^i = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i)$ обозначает i -ю вектор-строку, а $\mathbf{a}_j = (a_j^1, a_j^2, \dots, a_j^n)$ — j -й вектор-столбец.

ПРИМЕР. Если G — граф, то все элементы его матрицы смежности $A = (a_j^i)$ равны 0 или 1; так, для графа, изображенного на рис. 14—1, имеем:

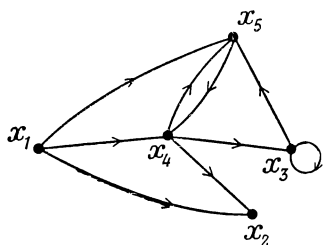


Рис. 14—1.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} j=1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} i=1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Заметим, что в матрице A элемент a_3^3 на главной диагонали равен 1 в соответствии с тем, что при вершине x_3 есть петля.

Пусть $A = (a_j^i)$ — матрица смежности некоторого p -графа. Ее *транспонированная* матрица $A^* = (a_j^{*i})$ является результатом зеркального отображения матрицы A относительно главной диагонали и поэтому служит матрицей смежности того p -графа, который получается из исходного переменной ориентации всех дуг.

Матрица $A' = (a_j'^i)$, *дополнительная* для A , определяется так: $a_j'^i = p - a_j^i$; в случае графа (X, Γ) она получается из A заменой

всех единиц нулями и наоборот; это — матрица смежности графа (X, Γ') , где отображение Γ' определено следующим образом:

$$\Gamma'x = X \setminus \Gamma x \quad (x \in X).$$

Теорема 1. Пусть G — граф, A — его матрица смежности. Матрица A симметрична ($A = A^*$, или $a_j^i = a_i^j$) тогда и только тогда, когда граф G — симметрический. Матрица A антисимметрична [$A \leq (A')^*$, или $a_j^i + a_i^j \leq 1$] тогда и только тогда, когда граф G — антисимметрический. Матрица A полна [$A \geq (A')^*$, или $a_j^i + a_i^j \geq 1$] тогда и только тогда, когда граф G — полный.

(Непосредственно.)

Теорема 2. Пусть $G = (X, U)$ и $H = (X, V)$ — два мультиграфа с одним и тем же множеством вершин и соответственно с матрицами смежности $A = (a_j^i)$ и $B = (b_j^i)$; матрице $A + B$ отвечает мультиграф, который получается объединением дуг U и V ; матрице AB отвечает мультиграф, образованный следующим образом: из вершины x в вершину y идет столько дуг, сколько существует различных путей, ведущих из x в y и составленных из двух дуг, первая из которых принадлежит U , а вторая принадлежит V .

1° В мультиграфе $(X, U \cup V)$ число дуг, идущих из x_i в x_j , равно

$$a_j^i + b_j^i;$$

но это не что иное, как общий элемент матрицы $A + B$.

2° Число различных путей вида $[x_i, x_k, x_j]$, где

$$(x_i, x_k) \in U, \quad (x_k, x_j) \in V,$$

равно $a_k^i b_j^k$; поэтому общее число путей из x_i в x_j , образованных дугой из множества U и последующей дугой из множества V , равно

$$\sum_{k=1}^n a_k^i b_j^k = \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{b}_j \rangle,$$

где $\langle \mathbf{a}^i, \mathbf{b}_j \rangle$ обозначает скалярное произведение вектора-строки \mathbf{a}^i и вектора-столбца \mathbf{b}_j , т. е. не что иное, как общий элемент матрицы AB .

Следствие 1. Если G — p -граф, а A — его матрица смежности, то элемент p_j^i матрицы $P = A^\lambda$ (полученной возведением матрицы A в степень λ) равен числу различных путей длины λ , идущих из x_i в x_j .

Утверждение тривиально при $\lambda = 1$; если допустить его справедливость при значении $\lambda - 1$, то оно останется справедливым также при значении λ , ибо $A^\lambda = A \cdot A^{\lambda-1}$ выражает, в силу предыдущей

теоремы, число путей длины $1 + (\lambda - 1) = \lambda$, идущих из вершины x_i в вершину x_j .

Следствие 2. В графе G существует путь длины λ тогда и только тогда, когда $A^\lambda \neq O$; не существует контуров тогда и только тогда, когда $A^\lambda = O$, начиная с некоторого λ^1 .

(Непосредственно, ввиду следствия 1.)

Эти результаты позволяют сводить к матричным задачам некоторые задачи на p -графы; мы изучим несколько таких задач.

Задачи на подсчет

Практическая выгода описания графа посредством его матрицы смежности очевидна, если требуется подсчитать пути графа, удовлетворяющие некоторым заданным условиям. Начнем со следующей задачи.

Задача 1. В полном антисимметрическом графе (X, U) определить число контуров длины 3.

Пример [2]. Собаке предлагают шесть различных видов пищи следующим образом: каждый день кладут перед собакой два вида пищи и отмечают, какую из них она съела первой. Испытав таким образом все возможные $C_6^2 = 15$ пар, строят граф (X, U) , где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_6\}$ состоит из 6 видов пищи и где $(x_i, x_j) \in U$, если пищу x_i собака предпочитает пище x_j . Этот граф является

полным; он может быть, например, графом, изображенным на рис. 14—2. Обозначим его матрицу смежности через A ; имеем

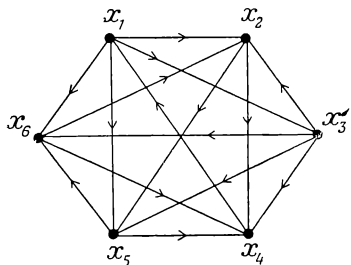


Рис. 14—2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Повторим теперь опыт, помещая перед собакой три вида пищи вместо двух: если это x_2, x_3, x_4 , то можно предсказать, что собака окажет предпочтение пище x_3 , но если речь идет о пище видов x_1, x_2, x_4 , являющихся вершинами контура, то для предсказания больше не будет оснований, вследствие непостоянства собаки в предшествую-

¹⁾ Взаимосвязь между матрицами типа A^λ , их характеристическими числами, с одной стороны, и геометрическими характеристиками графа (число путей определенного вида и т. п.), с другой, подробно исследуется Л. М. Лихтенбаумом и другими авторами (см. дополнительную литературу к гл. 14 и 15). — Прим. перев.

щих опытах. Если ξ — число контуров длины 3 в графе (X, U) , а $g(n)$ — наибольшее число контуров длины 3 в полном антисимметрическом графе порядка n , то можно считать коэффициентом непостоянства собаки отношение $\frac{\xi}{g(n)}$.

Легко показать, что

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n^3 - n}{24} & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ \frac{n^3 - 4n}{24} & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

В данном случае находим

$$g(6) = \frac{1}{24} \cdot 6(6^2 - 4) = 8.$$

Остается определить число ξ , т. е. решить задачу 1 для графа (X, U) .

Теорема 3. Пусть G — полный антисимметрический граф и $A = (a_{ij}^i)$ — его матрица смежности; если $r_i = \sum_j a_{ij}^i$ — сумма элементов i -й строки, то число контуров длины 3 равно

$$\xi = \frac{1}{12} n(n-1)(2n-1) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (r_i)^2.$$

Действительно, число циклов длины 3 равно

$$C_n^3 = \frac{1}{6} n(n-1)(n-2).$$

Цикл длины 3 не является контуром в том и только том случае, когда он имеет две дуги, исходящие из одной вершины x_i ; полное количество тех циклов длины 3, которые не являются контурами, составляет

$$\sum_{i=1}^n C_{r_i}^2 = \sum_i \frac{1}{2} r_i(r_i - 1) = \frac{1}{2} \sum_i (r_i)^2 - \frac{1}{2} \sum_i r_i.$$

Замечая, что

$$\sum_{i=1}^n r_i = |U| = C_n^2 = \frac{1}{2} n(n-1),$$

получаем

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) - \frac{1}{2} \sum_i (r_i)^2 + \frac{1}{4} n(n-1) = \\ &= \frac{1}{2} n(n-1) \left(\frac{n-2}{3} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \sum_i (r_i)^2, \end{aligned}$$

откуда и вытекает доказываемая формула.

Пример. Вернемся к предыдущему примеру, в котором

$$r_1 = 4, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 4, \quad r_4 = 1, \quad r_5 = 2, \quad r_6 = 2.$$

Имеем

$$\xi = \frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 11 - \frac{1}{2} (16 + 4 + 16 + 1 + 4 + 4) = \frac{1}{2} (55 - 45) = 5.$$

Вот эти контуры:

$$[x_1, x_2, x_4, x_1], \quad [x_1, x_3, x_4, x_1], \quad [x_1, x_5, x_4, x_1],$$

$$[x_1, x_6, x_4, x_1], \quad [x_2, x_5, x_6, x_2].$$

Задача 2. Рассмотрим граф G и три целых неотрицательных числа α, β, γ ; говорят, что путь $\mu = [y_0, y_1, \dots, y_m]$ отвечает тройке $\alpha\beta\gamma$, если на этом пути имеются две совпадающие вершины y_i и y_j ($i < j$), для которых $l(\mu[y_0, y_i]) = \alpha$, $l(\mu[y_i, y_j]) = \beta$, $l(\mu[y_j, y_m]) = \gamma$. Определить число путей, отвечающих заданной тройке $\alpha\beta\gamma$.

Ясно, что предыдущая задача 1 есть частный случай задачи 2 при $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $\gamma = 0$. Если M — произвольная квадратная матрица, то через $d(M)$ обозначим матрицу, главная диагональ которой та же, что у M , а все остальные элементы — нули.

Теорема 4. Пусть A — матрица смежности графа G , а s_j^i — число путей, отвечающих некоторой тройке $\alpha\beta\gamma$ и идущих из x_i в x_j ; тогда матрица $S = (s_j^i)$ равна произведению

$$S = A^\alpha d(A^\beta) A^\gamma.$$

В самом деле, количество контуров длины β задается диагональной матрицей $d(A^\beta)$ (теорема 2), поэтому число путей, отвечающих тройке $0\beta\gamma$, выразится матрицей $d(A^\beta) \cdot A^\gamma$, а число путей, отвечающих $\alpha\beta\gamma$, — матрицей $A^\alpha \cdot d(A^\beta) \cdot A^\gamma$.

Этот результат можно применить для подсчета числа неэлементарных путей длины k в заданном графе, если k не слишком велико: достаточно пересмотреть по отдельности все возможные тройки $\alpha\beta\gamma$ (см. [1], [4], [7]).

Пример. Подсчитаем различные неэлементарные пути длины 4 в графе с матрицей смежности A . Надо рассмотреть тройки 031 , 130 , 022 , 220 , 121 и соответствующие матрицы $d(A^3)A$, $Ad(A^3)$, $d(A^2)A^2$, $A^2d(A^2)$, $Ad(A^2)A$. Заметим, что некоторые пути длины 4 могут отвечать сразу двум тройкам; для их подсчета введем *элементарное произведение* двух матриц $A = (a_j^i)$ и $B = (b_j^i)$ в смысле Адамара: $A \times B = (a_j^i \times b_j^i)$; составим таблицу:

Пути	Тройки	Количество путей из x_i в x_j	Матрица
$[c, x, b, c, b]$	031, 220	$\sum_k a_k^i a_j^k (a_i^j a_j^i)$	$(A \times A^*) \times A^2$
$[c, b, x, c, b]$	130, 031	$\sum_k (a_j^i) a_k^j a_i^k$	$A \times (A^2)^*$
$[c, b, c, x, b]$	130, 022	$\sum_k (a_j^i a_i^j) a_k^i a_j^k$	$(A \times A^*) \times A^2$
$[x, c, b, c, b]$	121, 220	$\sum_k a_k^i (a_j^k a_k^j)$	$A(A \times A^*)$
$[c, b, c, b, x]$	022, 121	$\sum_k (a_k^i a_i^k) a_j^k$	$(A \times A^*) A$

Теперь, в графе без петель количества неэлементарных путей длины 4 задаются матрицей, которая получится, если сложить матрицы, определенные ранее, и вычесть матрицы таблицы.

Задача о лидере

С другим случаем, в котором матрица смежности графа играет важную роль, мы сталкиваемся, когда X означает множество лиц, а $(x, y) \in U$ выражает *превосходство* (доминирование) x над y .

Говоря, что x *превосходит* y , мы вкладываем в это слово весьма широкий смысл: x может быть игроком, победившим в турнире игрока y ; или это депутат, который имеет возможность обеспечить себе голос депутата y на выборах председателя; это может быть член некоторого общества, пользующийся уважением другого члена y . Задача, которую мы здесь ставим, заключается в определении лидера, т. е. того лица x_0 , которое следует считать победителем в турнире, или председателем палаты депутатов, или наиболее представительным членом организации.

ПРИМЕР. Рассмотрим граф на рис. 14—3, где вершины изображают членов общества, а из

x в y идет дуга, когда лицо x имеет достаточное влияние на y ; такие графы были изучены в социологии под названием „социограмм“ (см. Морено [6]).

Часто стремятся выдвинуть в качестве лидера наиболее влиятельное лицо; в графе, изображенном на рис. 14—3, лицо y является непосредственно самым влиятельным, поскольку оно превосходит

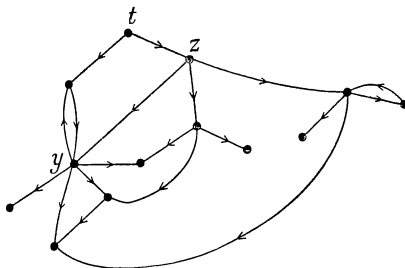


Рис. 14—3.

пять лиц; однако сами эти пять лиц не влиятельны. Лицо z более *могущественно*: оно непосредственно влияет лишь на трех лиц, но эти трое в свою очередь весьма влиятельны. Отсюда уже видна сложность задачи, которой мы занимаемся.

В главе 12 в качестве лидера предполагалось выбирать центр графа, который наверняка является лицом *могущественным*; однако во многих случаях это понятие оказывается слишком грубым: можно еще измерять силу $\pi(x)$ каждого лица x , притом и в случае отсутствия центра. Когда эта функция $\pi(x)$ будет точно определена, лидером мы объявим то лицо x_0 , чья сила $\pi(x_0)$ — наибольшая.

Рассмотрим для определенности шахматный турнир с пятью участниками x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ; выигрыш x_i у x_j изображаем двумя дугами, направленными из x_i в x_j ; если x_i и x_j сыграли вничью, то рисуем одну дугу из x_i в x_j и одну дугу из x_j в x_i . Наконец, при каждой вершине строим петлю. Если турнир завершен, то получается 2-граф G — например, как на рис. 14—4, с матрицей смежности

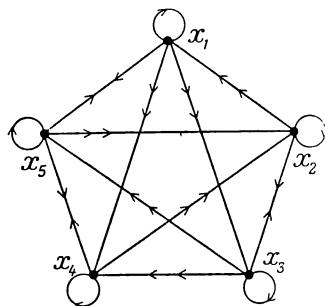


Рис. 14—4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы A удовлетворяют условию $a_j^i + a_i^j = 2$; кроме того, матрицу A можно представить в виде суммы кососимметрической матрицы B и матрицы E , все элементы которой равны 1.

Обозначим через $p_j^i(k)$ общий элемент матрицы A^k , т. е. количество путей длины k , идущих из x_i в x_j , и положим

$$p^i(k) = p_1^i(k) + p_2^i(k) + \dots + p_5^i(k).$$

Число $p^i(k)$ назовем *итерированной силой порядка k игрока x_i* ; оправдаем эту терминологию.

Итерированная сила порядка 1 образуется сложением элементов матрицы A по строкам, т. е.

$$p^1(1) = 1 + 0 + 2 + 2 + 1 = 6,$$

$$p^2(1) = 2 + 1 + 1 + 0 + 0 = 4,$$

$$p^3(1) = 0 + 1 + 1 + 2 + 2 = 6,$$

$$p^4(1) = 0 + 2 + 0 + 1 + 1 = 4,$$

$$p^5(1) = 1 + 2 + 0 + 1 + 1 = 5.$$

С точки зрения этой силы $p^i(1)$ имеем двух победителей: x_1 и x_3 , каждый из которых превосходит наибольшее число игроков [в турнире без ничьих ввиду теоремы 3 (гл. 12) таким способом полуются все центры графа].

Силу порядка 2 каждого игрока можно найти путем сложения очков тех игроков, с которыми он сыграл вничью, и удвоенных количеств очков игроков, у которых он выиграл; в данном примере

$$p^1(2) = 6 + 0 + (2 \times 6) + (2 \times 4) + 5 = 31,$$

$$p^2(2) = (2 \times 6) + 4 + 6 + 0 + 0 = 22,$$

$$p^3(2) = 0 + 4 + 6 + (2 \times 4) + (2 \times 5) = 28,$$

$$p^4(2) = 0 + (2 \times 4) + 0 + 4 + 5 = 17,$$

$$p^5(2) = 6 + (2 \times 4) + 0 + 4 + 5 = 23.$$

На этот раз игрок x_1 занимает один первое место, и это обусловлено тем, что он победил более сильных игроков, чем те, которых победил x_3 .

Продолжим итерацию:

$$p^1(3) = 31 + 0 + (2 \times 28) + (2 \times 17) + 23 = 144,$$

$$p^2(3) = (2 \times 31) + 22 + 28 + 0 + 0 = 112,$$

$$p^3(3) = 0 + 22 + 28 + (2 \times 17) + (2 \times 23) = 130,$$

$$p^4(3) = 0 + (2 \times 22) + 0 + 17 + 23 = 84,$$

$$p^5(3) = 31 + (2 \times 22) + 0 + 17 + 23 = 115.$$

Распределение мест здесь то же, что и в предыдущем случае: x_1, x_3, x_5, x_2, x_4 ; видимо, оно стабилизировалось. И действительно, можно эффективно проверить, что при дальнейшем продолжении итерации порядок мест остается неизменным.

Это побуждает нас определить *силу* игрока x_i как предел при $k \rightarrow \infty$ отношения

$$\pi_k^i = \frac{p^i(k)}{p^1(k) + p^2(k) + \dots + p^n(k)}.$$

Вследствие теоремы Перрона — Фробениуса¹⁾ этот предел всегда существует; более того, он крайне просто вычисляется, поскольку вектор $\pi_k = (\pi_k^1, \pi_k^2, \dots, \pi_k^n)$ стремится к одному из собственных векторов матрицы A ²⁾.

¹⁾ См., например, Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, гл. 13. — *Прим. перев.*

²⁾ Это замечание, которым мы обязаны Уэю [9], можно сформулировать следующим образом.

Рассмотрим матрицу смежности A некоторого p -графа (с петлей при каждой вершине) и составим определитель

$$\text{Det}(A - \lambda I) = f(\lambda).$$

(Окончание сноски на стр. 150.)

Применение булевых операций

В множестве вещественных чисел ≥ 0 определим две операции, которые назовем *обобщенным сложением* и *обобщенным умножением*. Первая операция относит двум числам λ_1 и λ_2 число $\lambda \geq 0$ — их обобщенную сумму, обозначаемую символом $\lambda = \lambda_1 \dot{+} \lambda_2$; вторая операция относит числам λ_1 и λ_2 их обобщенное произведение $\lambda' \geq 0$, обозначаемое символом $\lambda' = \lambda_1 \dot{\times} \lambda_2$.

Рассмотрим теперь две матрицы $A = (a_j^i)$ и $B = (b_j^i)$, элементы которых — целые числа ≥ 0 ; *обобщенная сумма* этих матриц есть матрица $S = A \dot{+} B = (s_j^i)$, где $s_j^i = a_j^i \dot{+} b_j^i$; *обобщенное произведение* есть матрица $P = A \dot{\times} B = (p_j^i)$, где

$$p_j^i = (a_1^i \dot{\times} b_j^1) \dot{+} (a_2^i \dot{\times} b_j^2) \dot{+} \dots \dot{+} (a_n^i \dot{\times} b_j^n).$$

Таким образом, „обобщенные“ операции над матрицами определяются в точности так же, как обычные. Предположим, что операции $\dot{+}$ и $\dot{\times}$, подобно обычным сложению и умножению, удовлетворяют условиям:

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda_1 \dot{+} \lambda_2 = \lambda_2 \dot{+} \lambda_1, \\ \lambda_1 \dot{+} (\lambda_2 \dot{+} \lambda_3) = (\lambda_1 \dot{+} \lambda_2) \dot{+} \lambda_3, \\ \lambda_1 \dot{\times} \lambda_2 = \lambda_2 \dot{\times} \lambda_1, \\ \lambda_1 \dot{\times} (\lambda_2 \dot{\times} \lambda_3) = (\lambda_1 \dot{\times} \lambda_2) \dot{\times} \lambda_3, \\ \lambda_1 \dot{\times} (\lambda_2 \dot{+} \lambda_3) = (\lambda_1 \dot{\times} \lambda_2) \dot{+} (\lambda_1 \dot{\times} \lambda_3) \end{cases}$$

(иначе говоря, имеем „коммутативное кольцо“ относительно этих операций).

Обобщенным операциям над матрицами посвящена обширнейшая литература; мы укажем только на те свойства, которые имеют непосредственное приложение к интересующим нас вопросам.

1° *Корень характеристического уравнения $f(\lambda) = 0$, обладающий наименьшей абсолютной величиной, — простой; пусть λ_1 — этот простой корень, а $\mathbf{t}_1 = (t_1^1, t_1^2, \dots, t_1^n)$ — вектор, для которого*

$$A\mathbf{t}_1 = \lambda_1 \mathbf{t}_1, \quad \sum_{i=1}^n t_1^i = 1.$$

2° *Вектор π_k стремится к \mathbf{t}_1 при неограниченном возрастании k .*

1° Эта первая часть утверждения есть не что иное, как теорема Перрона — Фробениуса, хорошо известная в теории стохастических процессов.

2° Вторая часть получается непосредственно, если надлежащим преобразованием координат привести матрицу A к диагональному виду.

Пример. Для сети G , каждой дуге u которой отнесена длина $l(u)$, рассмотрим матрицу $A = (a_j^i)$, где

$$a_j^i = \begin{cases} l(x_i, x_j) & \text{при } (x_i, x_j) \in U, \\ \infty & \text{при } (x_i, x_j) \notin U \end{cases}$$

Положим

$$\begin{aligned} \lambda_1 \dot{+} \lambda_2 &= \min \{ \lambda_1, \lambda_2 \}, \\ \lambda_1 \dot{\times} \lambda_2 &= \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned}$$

Эти операции удовлетворяют всей системе (1); общим элементом матрицы $A \cdot A = A^2$ служит

$$p_j^i = \min_k (a_k^i + a_j^k);$$

это число выражает длину кратчайшего пути из x_i в x_j , образованного двумя дугами или одной дугой (ибо $a_j^i + a_j^i = a_j^i$).

Вообще A^α указывает длину кратчайшего пути от одной вершины до другой, составленного не более чем α дугами. Существует значение α_0 , для которого

$$A^{\alpha_0} = A^{\alpha_0+1} = A^{\alpha_0+2} = \dots$$

Матрица A^{α_0} указывает кратчайшие расстояния от одной вершины до другой.

Теорема 5. При обобщенных операциях $\dot{+}$ и $\dot{\times}$ матрицы удовлетворяют условиям:

- (1) $A \dot{+} B = B \dot{+} A$,
- (2) $A \dot{+} (B \dot{+} C) = (A \dot{+} B) \dot{+} C$,
- (3) $A \cdot (B \dot{+} C) = (A \cdot B) \dot{+} (A \cdot C)$,
- (4) $(A \dot{+} B)^* = B^* \dot{+} A^*$,
- (5) $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$.

Равенства (1), (2) и (4) получаются непосредственно. Для доказательства равенства (3) достаточно выписать общий элемент матрицы $A \cdot (B \dot{+} C)$:

$$\begin{aligned} \langle a^i, b_j \dot{+} c_j \rangle &= [a_1^i \dot{\times} (b_j^1 \dot{+} c_j^1)] \dot{+} \dots = \\ &= [(a_1^i \dot{\times} b_j^1) \dot{+} (a_1^i \dot{\times} c_j^1)] \dot{+} \dots = \langle a^i, b_j \rangle \dot{+} \langle a^i, c_j \rangle. \end{aligned}$$

Для доказательства равенства (5) достаточно учесть, что элемент p_j^{*i} матрицы $(A \cdot B)^* = P^*$ равен

$$p_j^{*i} = p_i^j = \langle a^j, b_i \rangle = \langle a_j^*, b^* \rangle = \langle b^{*i}, a_j^* \rangle.$$

Заметим, что, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Если все рассматриваемые матрицы являются матрицами смежности некоторых графов, то элементами матриц являются 0 и 1, и мы определим операции $\dot{+}$ и $\dot{\times}$ так:

$$\begin{aligned} 1 \dot{+} 1 &= 1, & 1 \dot{\times} 1 &= 1, \\ 1 \dot{+} 0 &= 1, & 1 \dot{\times} 0 &= 0, \\ 0 \dot{+} 0 &= 0, & 0 \dot{\times} 0 &= 0. \end{aligned}$$

Иначе говоря, положим

$$\begin{aligned} \lambda_1 \dot{+} \lambda_2 &= \max \{ \lambda_1, \lambda_2 \}, \\ \lambda_1 \dot{\times} \lambda_2 &= \min \{ \lambda_1, \lambda_2 \}. \end{aligned}$$

Операции $\dot{+}$ и $\dot{\times}$ называются тогда соответственно *булевым сложением* и *булевым умножением*.

Теорема 6. Если A и B — соответственно матрицы смежности графов $G = (X, \Gamma)$ и $H = (X, \Delta)$, то булева сумма $A \dot{+} B$ отвечает графу $(X, \Gamma \cup \Delta)$, а булево произведение $A \cdot B$ — графу $(X, \Delta \cdot \Gamma)$, где, как обычно,

$$\begin{aligned} (\Gamma \cup \Delta) x &= \Gamma x \cup \Delta x, \\ (\Delta \cdot \Gamma) x &= \Delta(\Gamma x). \end{aligned}$$

Этот результат аналогичен теореме 2; элемент p_j^i произведения $P = A \cdot B$ равен

$$p_j^i = (a_1^i \dot{\times} b_j^1) \dot{+} (a_2^i \dot{\times} b_j^2) \dot{+} \dots$$

Таким образом, если существует путь вида $[x_i, x_k, x_j]$, где $x_k \in \Gamma x_i$, $x_j \in \Delta x_k$, то $a_k^i \dot{\times} b_j^k = 1$, откуда $p_j^i = 1$; в противном случае $p_j^i = 0$. Значит, $p_j^i = 1$ тогда и только тогда, когда $x_j \in \Delta(\Gamma x_i)$, т. е. когда от x_i к x_j ведет двухзвенная цепь, образованная дугой из G и последующей дугой из H .

Следствие. Пусть A — матрица смежности графа G ; булево произведение $A^\alpha = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ служит матрицей смежности того графа, который содержит дугу (x, y) тогда и только тогда, когда в G существует путь длины α , идущий из x в y („граф α -превосходства“).

(Непосредственно.)

Понятно, что алгебра булевых матриц, которая развивается параллельно алгебре обычных матриц, позволяет решать такого рода задачи на графы, как, например: *известен граф α -превосходства; найти исходный граф*.

Эта задача аналогична задаче определения корня α -й степени из матрицы.

Матрицы инциденций

Вполне унимодулярные матрицы

Пусть u_1, u_2, \dots, u_m — дуги графа G , а x_1, x_2, \dots, x_n — его вершины; положим

$$s_j^i = \begin{cases} +1, & \text{если } u_j \text{ исходит из } x_i; \\ -1, & \text{если } u_j \text{ заходит в } x_i; \\ 0, & \text{если } u_j \text{ не инцидентна } x_i. \end{cases}$$

Матрица $S = (s_j^i)$ называется *матрицей инциденций для дуг* графа. Если, далее, u_1, u_2, \dots, u_m означают *ребра* графа, то положим

$$r_j^i = \begin{cases} +1, & \text{если } x_i \text{ инцидентна } u_j; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица $R = (r_j^i)$ называется *матрицей инциденций для ребер* графа.

Матрица $A = (a_j^i)$ называется *вполне унимодулярной*, если определитель любой ее квадратной подматрицы равен 0, $+1$ или -1 . Каждый элемент такой матрицы, будучи ее минором первого порядка, тоже равен 0, $+1$ или -1 ; нам теперь нужны критерии для определения, является ли заданная матрица с элементами 0, $+1$, и -1 вполне унимодулярной.

Пример. Для графа, изображенного на рис. 15—1

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

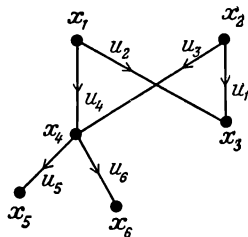


Рис. 15—1.

Обе эти матрицы вполне унимодулярны, что можно проверить непосредственно или что вытекает из нижеследующих теорем.

Теорема 1 (Хеллер—Томпкинс—Гейл [2]). Пусть A — матрица с элементами 0, $+1$, -1 , каждый столбец которой содержит

не более двух отличных от нуля элементов; A вполне унимодулярна в том и только в том случае, если все ее строки можно распределить по двум непересекающимся множествам I_1 и I_2 с соблюдением следующих условий:

(1) если два ненулевых элемента одного и того же столбца имеют одинаковый знак, то один из них принадлежит I_1 , а другой I_2 ;

(2) если два ненулевых элемента одного и того же столбца имеют противоположные знаки, то оба они содержатся или в I_1 , или в I_2 .

1° Пусть A — матрица, строки которой можно распределить как указано; любая квадратная подматрица B матрицы A тоже обладает этим свойством. Для доказательства того, что A вполне унимодулярна, достаточно показать, что $\text{Det}(B) = 0, +1$ или -1 .

Это утверждение справедливо для матриц B порядка 1; предположим, что оно верно для матриц порядка $q-1$, и докажем, что оно остается справедливым для квадратной матрицы B порядка q , у которой два непересекающихся множества суть I_1 и I_2 .

Если каждый вектор-столбец \mathbf{b}_j имеет ровно два ненулевых элемента, то

$$\sum_{i \in I_1} \mathbf{b}^i = \sum_{i \in I_2} \mathbf{b}^i.$$

Значит, векторы-строки линейно зависимы и $\text{Det}(B) = 0$.

Если какой-либо вектор-столбец не имеет ненулевых элементов, то также $\text{Det}(B) = 0$.

Наконец, если существует вектор-столбец \mathbf{b}_j ровно с одним ненулевым элементом, скажем $\mathbf{b}_j^i = +1$, то обозначим через C квадратную подматрицу, остающуюся после удаления из B j -го столбца и i -й строки; поскольку теорема предполагается верной для матриц порядка $q-1$, имеем

$$\text{Det}(B) = \pm \text{Det}(C) = +1, -1 \text{ или } 0.$$

Во всех случаях предложение доказано.

2° Допустим, что A — вполне унимодулярная матрица, каждый столбец которой имеет не более двух ненулевых элементов, и докажем, что существует разбиение (I_1, I_2) с указанными выше свойствами. Можно предполагать, что каждый столбец матрицы A содержит в точности два ненулевых элемента, ибо любой столбец с единственным ненулевым элементом и любой столбец, не содержащий ненулевых элементов, можно удалить без ущерба для теоремы. Матрице A отнесем граф G (неориентированный и без петель) следующим образом: i -й строке ставим в соответствие вершину x_i , j -му столбцу — ребро \mathbf{u}_j ; последнее будет соединять вершины x_k и x_h , когда $\mathbf{a}_j^k \neq 0$ и $\mathbf{a}_j^h \neq 0$. Наконец, мы скажем, что ребро \mathbf{u}_j — специальное, если оба ненулевых элемента вектора-столбца \mathbf{a}_j имеют одинаковый

знак; покажем, что *каждый элементарный цикл графа содержит четное число специальных ребер*.

В самом деле, если бы существовал элементарный цикл, не обладающий этим свойством, например $\mu = [x_1, x_2, \dots, x_k, x_1] = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$, то мы развинули бы определитель соответствующей квадратной подматрицы

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_k \\ \alpha_1 & 0 & \dots & \beta_k \\ \beta_1 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

Имеем $\alpha_j \neq 0, \beta_j \neq 0$; кроме того, $\alpha_j = -\beta_j$ для тех индексов j , которые соответствуют неспециальным ребрам в количестве $k - (2p + 1)$.

Обозначая через $\varepsilon(i_1, i_2, \dots, i_k)$ число беспорядков в перестановке (i_1, i_2, \dots, i_k) , мы можем написать

$$\begin{aligned} \text{Det}(B) &= (-1)^{\varepsilon(1, 2, \dots, k)} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k + (-1)^{\varepsilon(2, \dots, k, 1)} \beta_2 \dots \beta_k \beta_1 = \\ &= (+1) \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k + (-1)^{k-1} [(-1)^{k-(2p+1)} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k] = \\ &= 2\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k = \pm 2. \end{aligned}$$

Но это противоречит условию, что матрица A вполне унимодулярна.

Итак, каждый элементарный цикл содержит четное число специальных ребер, значит, то же справедливо для любого цикла графа. Если каждое неспециальное ребро стянуть в точку, то получится новый граф без циклов нечетной длины и поэтому бихроматический (в силу теоремы Кёнига, см. гл. 4); обозначая через I_1 множество индексов вершин x_i , окрашенных в синий цвет, а через I_2 — множество индексов вершин x_i , окрашенных в красный, получим два искоемых непересекающихся множества I_1 и I_2 .

Следствие 1. *Матрица инциденций $S = (s_j^i)$ для дуг любого графа вполне унимодулярна.*

В самом деле, вектор-столбец \mathbf{s}_j состоит из одного элемента $+1$, одного элемента -1 и элементов 0. Поэтому можно положить:

$$I_1 = \{1, 2, \dots, n\}, \quad I_2 = \emptyset.$$

Следствие 2. *Матрица инциденций $R = (r_j^i)$ для ребер графа вполне унимодулярна тогда и только тогда, когда граф бихроматический.*

Действительно, поскольку все ненулевые элементы в R равны ± 1 , матрица R является вполне унимодулярной тогда и только тогда,

когда вершины графа можно распределить по двум непересекающимся внутренне устойчивым множествам:

$$\{x_i/i \in I_1\} \quad \text{и} \quad \{x_i/i \in I_2\}.$$

Теорема 2 (Хеллер). Пусть $A = (a^i_j)$ — матрица с элементами 0, +1 и -1; для двух векторов-строк \mathbf{a}^i и \mathbf{a}^j положим $\mathbf{a}^i \prec \mathbf{a}^j$, когда каждый ненулевой элемент a^j_k строки \mathbf{a}^j равен элементу a^i_k строки \mathbf{a}^i , стоящему в том же столбце. Если

- (1) $a^i_k = a^j_k \neq 0$ при каком-либо $k \Rightarrow \mathbf{a}^i \prec \mathbf{a}^j$ или $\mathbf{a}^j \prec \mathbf{a}^i$,
 (2) $a^i_k = -a^j_k \neq 0$ при каком-либо $k \Rightarrow \mathbf{a}^i \prec -\mathbf{a}^j$ или $\mathbf{a}^j \prec -\mathbf{a}^i$,

то матрица A вполне унимодулярна.

Отношение \prec , как легко понять, является отношением порядка; например,

$$(0, -1, -1, 0+1, +1+1) \prec (0, -1, 0, 0, 0, 0+1).$$

Любая квадратная подматрица B матрицы A тоже обладает свойствами (1) и (2); покажем, что $\text{Det}(B)$ равен 0, -1 или +1.

Это предложение верно для матриц B порядка 1; допустив, что оно верно для матриц порядка $q-1$, докажем его справедливость для произвольной матрицы B порядка q .

Если B имеет столбец из одних нулей, то $\text{Det}(B) = 0$; если у B есть столбец с единственным ненулевым элементом, то $\text{Det}(B)$ равен (с точностью до знака) минору этого элемента, т. е. равен 0, +1 или -1. Осталось разобрать случай, когда в каждом столбце имеется по крайней мере два ненулевых элемента.

Пусть b^1_i и b^2_i — два ненулевых элемента вектора-столбца \mathbf{b}_i ; для определенности предположим, что $b^1_i = +1$, $b^2_i = +1$. В силу (1) $\mathbf{b}^1 \prec \mathbf{b}^2$ или $\mathbf{b}^2 \prec \mathbf{b}^1$. Меняя в случае надобности порядок строк, мы допустим, что $\mathbf{b}^1 \prec \mathbf{b}^2$; в матрице B каждую вектор-строку \mathbf{b}^i , для которой $\mathbf{b}^i \prec \pm \mathbf{b}^2$, заменим на $\bar{\mathbf{b}}^i = \mathbf{b}^i \mp \mathbf{b}^2$; в новой матрице \bar{B} элементы по-прежнему равны 0, -1 или +1, а $\text{Det}(\bar{B}) = \text{Det}(B)$. Покажем прежде всего, что \bar{B} удовлетворяет условиям (1) и (2).

В самом деле, строка $\bar{\mathbf{b}}^i$ может быть прежней, и тогда пишем \mathbf{b}^i , или измененной, и тогда пишем \mathbf{c}^i .

Пусть, например, $c^1_k = \bar{b}^1_k = +1$; покажем, что

$$\mathbf{c}^1 \prec \bar{\mathbf{b}}^i \quad \text{или} \quad \bar{\mathbf{b}}^i \prec \mathbf{c}^1.$$

Так как $b^2_k = 0$, то

$$b^1_k = c^1_k = +1 = \bar{b}^i_k = b^i_k,$$

откуда $\mathbf{b}^i \prec \mathbf{b}^1$ или $\mathbf{b}^1 \prec \mathbf{b}^i$. Но

$$\mathbf{b}^i \prec \mathbf{b}^1 \Rightarrow \mathbf{b}^i \prec \mathbf{b}^1 \prec \mathbf{b}^2 \Rightarrow \bar{\mathbf{b}}^i = \mathbf{b}^i - \mathbf{b}^2 \prec \mathbf{b}^1 - \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^1.$$

С другой стороны, при $\mathbf{b}^1 \prec \mathbf{b}^i$ не может быть ни $\mathbf{b}^i \prec -\mathbf{b}^2$ (ибо тогда мы имели бы $\mathbf{b}^1 \prec -\mathbf{b}^2$, что невозможно), ни $\mathbf{b}^2 \prec \pm \mathbf{b}^i$ (так как $b_k^i = 1$, а $b_k^2 = 0$); остается рассмотреть два случая: когда $\mathbf{b}^i \prec \mathbf{b}^2$ и когда ненулевые элементы строк \mathbf{b}^i и \mathbf{b}^2 распределяются по двум непересекающимся множествам столбцов. Имеем:

$$\mathbf{b}^1 \prec \mathbf{b}^i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b}^1 \prec \mathbf{b}^i \prec \mathbf{b}^2 \Rightarrow \mathbf{c}^1 = \mathbf{b}^1 - \mathbf{b}^2 \prec \mathbf{b}^i - \mathbf{b}^2 = \bar{\mathbf{b}}^i \\ \text{(первый случай)} \\ \text{или} \\ \mathbf{b}^1 \prec \mathbf{b}^i = \bar{\mathbf{b}}^i \Rightarrow \mathbf{c}^1 = \mathbf{b}^1 - \mathbf{b}^2 \prec \mathbf{b}^i = \bar{\mathbf{b}}^i \\ \text{(второй случай)} \end{array} \right.$$

В обоих случаях (1) доказано; (2) доказывается точно так же.

Повторяя теперь преобразование $B \rightarrow \bar{B}$ с другими строками, мы увеличим количество нулей в матрице \bar{B} ; будем делать это до тех пор, пока не получим в \bar{B} столбец, содержащий не более одного ненулевого элемента. Поскольку для матриц порядка $q-1$ теорема предполагается верной,

$$\text{Det}(B) = \text{Det}(\bar{B}) = 0, +1 \text{ или } -1.$$

Ч. И Т. Д.

Теорема 3. Пусть A и B — две матрицы, элементами которых являются 0 и 1 и которые удовлетворяют условию (1) предыдущей теоремы; тогда матрица C , полученная объединением строк матриц A и B , вполне унимодулярна.

В самом деле, рассмотрим квадратную подматрицу \bar{C} матрицы C , составленную из подматрицы \bar{A} матрицы A и подматрицы \bar{B} матрицы B , и покажем, что $\text{Det}(\bar{C}) = 0, +1$ или -1 . Как и в теореме 2, будем уменьшать количество ненулевых элементов матрицы \bar{A} (и матрицы \bar{B}) до тех пор, пока в каждом столбце останется не более одного элемента, отличного от нуля; матрица \bar{C} будет тогда иметь не более двух ненулевых элементов (которые равны $+1$) в каждом столбце; если один из этих элементов принадлежит \bar{A} , то другой содержится в \bar{B} ; поэтому в силу теоремы 1 матрица \bar{C} вполне унимодулярна, откуда следует, что $\text{Det}(\bar{C}) = 0, +1$ или -1 .

В самом деле, придавая переменным $(x^{n-p+1}, x^{n-p+2}, \dots, x^m)$ последовательно системы значений $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $\mathbf{e}_{m-n+p} = (0, 0, \dots, 1)$, мы определим, как показано выше, векторы $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{m-n+p}$ с координатами 0, ± 1 или -1 . Эти векторы линейно независимы, ибо

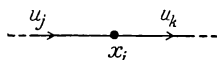
$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{c}_1 + \lambda_2 \mathbf{c}_2 + \dots + \lambda_{m-n+p} \mathbf{c}_{m-n+p} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_{m-n+p} \mathbf{e}_{m-n+p} = \mathbf{0} &\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_{m-n+p} = 0. \end{aligned}$$

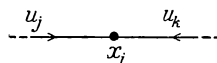
Поскольку число их равно размерности пространства решений уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, векторы \mathbf{c}_k образуют фундаментальную систему решений.

Ч. И Т. Д.

Как видно из первого параграфа гл. 4, каждому циклу μ антисимметрического графа можно поставить в соответствие m -мерный вектор (c^1, c^2, \dots, c^m) следующим образом: если при обходе цикла μ дуга u_j проходится r раз в направлении ее ориентации и s раз в противоположном направлении, то $c^j = r - s$. Мы видели также, что наибольшее число независимых циклов равно $\nu(G) = m - n + p$, где m — число дуг, n — число вершин, p — число компонент (теорема 2 гл. 4).

Теорема 5 (Пуанкаре — Веблен — Александер [6], [7]). Пусть G — антисимметрический граф, $S = (s_j^i)$ — его матрица инцидентий для дуг; чтобы вектор $\mathbf{c} = (c^1, c^2, \dots, c^m)$ с целочисленными координатами представлял цикл или сумму циклов, необходимо и достаточно, чтобы $S\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

 Случай 1

 Случай 2

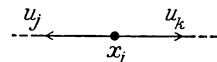
 Случай 3

Рис. 15—2.

1° Условие необходимо. Надо лишь показать, что вектор \mathbf{c} , отвечающий элементарному циклу, удовлетворяет условию $S\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Допустим, что

$$\mu = [x_1, x_2, \dots, x_k, x_1]$$

— некоторый элементарный цикл, $\mathbf{c} = (c^1, c^2, \dots, c^m)$ — соответствующий вектор, и покажем, что

$$(1) \quad s_1^i c^1 + s_2^i c^2 + \dots + s_m^i c^m = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Если цикл μ не проходит через i -ю вершину x_i графа, то он не содержит никакой дуги u_j , инцидентной x_i , поэтому $c^j = 0$ для всех тех индексов j , для которых $s_j^i \neq 0$, откуда и следует (1).

Если цикл μ проходит через вершину x_i , то он содержит ровно две дуги u_j и u_k , инцидентные x_i ; в отношении ориентации этих

дуг возможны три случая, указанные на рис. 15—2. В случае 1 имеем

$$c^j = c^k \neq 0; \quad s_j^i = -s_k^i \neq 0.$$

Отсюда следует $s_j^i c^j + s_k^i c^k = 0$, т. е. (1).

В случаях 2 и 3 имеем

$$c^j = -c^k \neq 0; \quad s_j^i = s_k^i \neq 0.$$

Отсюда следует $s_j^i c^j + s_k^i c^k = 0$, т. е. опять (1).

Равенство (1) доказано во всех случаях.

2° *Условие достаточно.* Всякий вектор \mathbf{c} с целочисленными координатами, для которого $S\mathbf{c} = \mathbf{0}$, является линейной комбинацией (с целыми коэффициентами) векторов $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{m-n+p}$, определенных в теореме 4; нам достаточно для каждого $k = 1, 2, \dots, m-n+p$ построить такую систему циклов, чтобы сумма соответствующих им векторов была равна \mathbf{c}_k .

Рассмотрим множество u_k тех дуг графа G , которым отвечают ненулевые координаты вектора \mathbf{c}_k . Так как $s_j^i c_k^j$ может равняться только 0, $+1$ или -1 , а $\sum_{j=1}^m s_j^i c_k^j = 0$ при любом i , то $|s_j^i c_k^j| = 1$ для четного количества индексов j ; иными словами, каждая вершина x_i инцидентна четному числу дуг из u_k . Отсюда следует, что из всех дуг множества u_k можно составить систему циклов.

Ч. И Т. Д.

Эта теорема дает аналитический метод для нахождения независимых циклов графа; однако в следующей главе мы познакомимся с гораздо более простым геометрическим методом.

Цикломатические матрицы

Пусть $\mathbf{c}_1 = (c_1^1, c_1^2, \dots, c_1^m), \dots, \mathbf{c}_v = (c_v^1, c_v^2, \dots, c_v^m)$ — векторы базы независимых циклов графа G ; рассмотрим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_v^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_v^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^m & c_2^m & \dots & c_v^m \end{pmatrix}.$$

Она называется *цикломатической* матрицей графа G . Если векторы-столбцы c_k выбраны, как в теореме 4, то все элементы матрицы C равны 0, -1 или $+1$, а сама матрица имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & . & . & . & . & . & c_v^1 \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ c_1^{m-v} & . & . & . & . & . & c_v^{m-v} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 0 & . . . & 1 & . \end{pmatrix}.$$

Произведение матрицы C на матрицу S слева равно матрице O , ибо

$$SC = \begin{pmatrix} \langle s^1, c_1 \rangle & \langle s^1, c_2 \rangle & \dots & \langle s^1, c_v \rangle \\ \langle s^2, c_1 \rangle & \langle s^2, c_2 \rangle & \dots & . \\ . & . & . & . \\ \langle s^n, c_1 \rangle & . & . & \dots \langle s^n, c_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & . \\ . & & & . \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, если известна цикломатическая матрица C , то можно найти матрицу инцидентий для дуг из уравнения $SC = O$; для нахождения векторов-строк матрицы S достаточно решить линейное уравнение

$$C^*s = 0.$$

Это замечание имеет многочисленные применения в теории релейных схем¹⁾.

Пример (Окада [5]). Неизвестное электрическое реле составлено из 8 выключателей u_1, u_2, \dots, u_8 (которые мы для простоты будем обозначать цифрами 1, 2, ..., 8). Эти выключатели присоединены к контактам $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ в неизвестном порядке. Поставим целью определить геометрическую конфигурацию реле; для этого установим, при замыкании каких именно множеств выключателей реле пропускает ток и лампа горит.

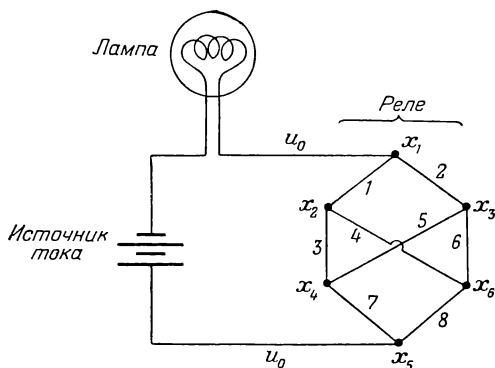
Пусть лампа горит при следующих комбинациях: 13568, 137, 14567, 148, 23458, 23467, 257, 268.

¹⁾ Цикломатическая матрица, называемая также *второй матрицей инцидентий*, широко применяется не только в теории релейных схем, но и в теории электрических сетей с заданными физическими характеристиками звеньев (см., например, [83]). — *Прим. перев.*

Теперь можно составить матрицу C ; ее элементы, с точностью до слагаемого, кратного 2, будут:

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Отбрасывая столбцы, которые являются линейными комбинациями



Р и с. 15—3.

остальных¹⁾, и транспонируя матрицу относительно главной диагонали, получим

$$C^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

¹⁾ Отброшены 4-й, 5-й, 7-й и 8-й столбцы, ко 2-му, 3-му и 6-му столбцам прибавлен 1-й столбец и столбцы переставлены. — Прим. ред.

Теперь надо решить сравнение $C't \equiv 0 \pmod{2}$, т. е.

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_4 + t_6 + t_7 + t_9 \equiv 0 \pmod{2}, \\ t_2 + t_3 + t_5 + t_6 + t_8 + t_9 \equiv 0 \pmod{2}, \\ t_4 + t_5 + t_8 + t_9 \equiv 0 \pmod{2}, \\ t_6 + t_7 + t_8 + t_9 \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Находим фундаментальную систему независимых решений; эти решения будут строками матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составляя линейные комбинации строк, добиваемся, чтобы каждый столбец содержал ровно две единицы; получаем матрицу инцидентий R для ребер графа G , изображенного на рис. 15—3:

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Деревья и прадеревья

Деревья

Начиная с этого момента, мы будем интересоваться главным образом конечными графами без учета ориентации. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ обозначает множество всех ребер, а U_x — множество ребер, инцидентных вершине x . Вершина x графа называется *висячей*, если существует только одно ребро, инцидентное x , т. е. $|U_x| = 1$; вершина x называется *изолированной*, если не существует ребер, инцидентных x , т. е. если $|U_x| = 0$. Через Γx обозначаем множество вершин, соединенных ребром с вершиной x .

Дерево, по определению, есть конечный связный граф без циклов, имеющий не менее двух вершин. Это важное понятие, введенное Кэли, можно определить совсем иначе, и в дальнейшем мы будем пользоваться каждым из шести определений, равносильность которых утверждается следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть H — граф порядка $|X| = n > 1$; следующие характеристические свойства дерева равносильны:

- (1) H связан и не содержит циклов;
- (2) H не содержит циклов и имеет $n - 1$ ребер;
- (3) H связан и имеет $n - 1$ ребер;
- (4) H не содержит циклов, но добавление ребра между любыми двумя несмежными вершинами приводит к появлению циклов (и только одного элементарного цикла);
- (5) H связан, но утрачивает это свойство после удаления любого ребра;
- (6) всякая пара вершин соединена цепью и только одной.

В самом деле:

(1) \Rightarrow (2), ибо, обозначив через p число компонент, а через m — число ребер, будем иметь $p = 1$, $v = m - n + p = 0$, откуда $m = n - p = n - 1$.

(2) \Rightarrow (3), ибо если $v = 0$ и $m = n - 1$, то $p = v - m + n = 1$ и H связан.

(3) \Rightarrow (4), ибо из $p = 1$ и $m = n - 1$ следует $v = m - n + p = 0$, т. е. H не содержит циклов; далее, если добавить ребро между двумя несмежными вершинами, то v станет равным 1, значит появится в точности один элементарный цикл.

(4) \Rightarrow (5), ибо если бы H не был связан, то у него имелись бы две вершины x и y , не соединенные никакой цепью и такие, что добавление ребра $[x, y]$ не приводит к появлению циклов; значит, $p = 1$, $v = 0$, откуда $m = n - 1$. После удаления одного ребра получим $m = n - 2$, $v = 0$, откуда $p = v - m + n = 2$, т. е. H уже не будет связным.

(5) \Rightarrow (6), ибо для любых двух вершин x и y существует соединяющая их цепь (поскольку H связан), но не существует двух таких цепей (так как удаление ребра, принадлежащего второй цепи и не принадлежащего первой, не нарушило бы связности графа).

(6) \Rightarrow (1), ибо если H имеет цикл, то удаление какого-нибудь ребра из цикла не нарушает связности графа.

Теорема 2. *Всякое дерево имеет по крайней мере две висячие вершины.*

Пусть H — дерево, не имеющее висячих вершин или имеющее только одну такую вершину. Представим себе путешественника, отправившегося из произвольной вершины (в первом случае) или из висячей вершины (во втором случае): если он решил не проходить дважды по одному и тому же ребру, то он не сможет дважды оказаться в одной и той же вершине (ибо H не имеет циклов); кроме того, прибыв в некоторую вершину x , он всегда сможет покинуть ее по другому ребру (так как вершина x — не висячая и $|U_x| \geq 2$). Значит, путешествие будет продолжаться без конца, а это невозможно, поскольку граф H конечен.

Теорема 3. *Граф $G = (X, U)$ тогда и только тогда содержит частичный граф, являющийся деревом, когда он связан.*

Если G несвязен, то все его частичные графы несвязны и G не может содержать частичного дерева.

Если G связан, то выясним, имеется ли в нем ребро, удаление которого не нарушает связности. В случае, когда таких ребер нет, G сам является деревом в силу свойства (5); если же такое ребро есть, то удалим его и выясним, имеется ли в полученном графе ребро, удаление которого не нарушает связности, и т. д. ...

Когда удаление ребер без нарушения связности станет невозможным, получим дерево [см. свойство (5)], множеством вершин которого по-прежнему служит X .

Ч. И Т. Д.

Эта теорема дает также алгоритм для построения некоторого частичного дерева данного графа. Можно обобщить задачу следующим образом.

Задача 1. Рассмотрим связный граф $G = (X, U)$, каждому ребру u которого отнесено число $l(u) \geq 0$, называемое *длиной* этого ребра;

найти такое частичное дерево $H = (X, V)$ графа G , чтобы суммарная длина $\sum_{u \in V} l(u)$ была наименьшей. Эта задача очень часто встречается в технике связи и во многих других областях.

Пример. Какова наименьшая длина кабеля, необходимого для того, чтобы соединить между собой n данных городов? Вершинами графа здесь служат города, а $l(x, y)$ выражает в километрах расстояние между городами x и y . Искомая кабельная сеть должна быть связной и, в силу требования минимальности длины, не содержать циклов, т. е. быть деревом. Таким образом, ищется „кратчайшее“ из деревьев-являющихся частичными графами полного графа с n вершинами.

Докажем сначала лемму.

Лемма. Если $G = (X, U)$ — полный граф и длины $l(u)$ его ребер все различны, то задача 1 имеет единственное решение (X, V) ; множество $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ получается следующим образом: в качестве v_1 берем кратчайшее ребро; в качестве v_2 — самое короткое из тех ребер, для которых $v_2 \neq v_1$ и $V_2 = \{v_1, v_2\}$ не содержит циклов; в качестве v_3 — самое короткое из тех ребер, для которых $v_3 \neq v_1, v_3 \neq v_2$ и $V_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$ не содержит циклов; и т. д. ...

Определим, как сказано, множества $V_1 = \{v_1\}, V_2, V_3, \dots, V_k$ и допустим, что к V_k невозможно добавить ребро без появления цикла. В силу характеристического свойства (4) граф (X, V_k) представляет собой дерево, а в силу характеристического свойства (2) имеем $k = n - 1$.

Пусть (X, V) — дерево, для которого $\sum_{u \in V} l(u)$ имеет наименьшее значение; покажем, что $V = V_{n-1}$.

Если $V \neq V_{n-1} = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$, то пусть v_k — первое из ребер v_1, v_2, \dots , не принадлежащее V .

В силу характеристического свойства (4) в $V \cup \{v_k\}$ существует элементарный цикл, притом единственный; на этом цикле имеется такое ребро u_0 , что $u_0 \notin V_{n-1}$. Если положить $W = (V \cup \{v_k\}) \setminus \{u_0\}$, то граф (X, W) не будет содержать циклов и будет иметь $n - 1$ ребер, поэтому он представляет собой дерево [свойство (2)].

$V_{k-1} \cup \{u_0\}$ не имеет циклов (ибо $\subset V$), значит, $l(u_0) > l(v_k)$. Дерево (X, W) , которое получается из дерева (X, V) заменой u_0 на v_k , имеет поэтому меньшую суммарную длину, чем (X, V) ; но это противоречит предположению о том, что дерево (X, V) — „кратчайшее“.

Алгоритм для задачи 1 (Краскал [6]). Действуем по этапам, выбирая каждый раз кратчайшее ребро, не образующее цикла с выбранными ранее ребрами.

Таким способом окажется выбранным множество $V_{n-1} = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ из $n-1$ ребер, и граф (X, V_{n-1}) будет деревом с наименьшей суммарной длиной.

В самом деле, длины всех ребер всегда можно сделать разными: если, например, $l(u_1) = l(u_2) = l(u_3)$, то произведем изменения:

$$l(u_1) \rightarrow l'(u_1) = l(u_1) + \varepsilon,$$

$$l(u_2) \rightarrow l'(u_2) = l(u_2) + 2\varepsilon,$$

$$l(u_3) \rightarrow l'(u_3) = l(u_3) + 3\varepsilon,$$

и выберем ε столь малым, чтобы не произошло изменений в соотношениях длин ребер.

Точно так же всегда можно сделать граф полным, добавляя столь длинные ребра w_k , чтобы

$$l(w_k) > \sum_{u \in U} l(u).$$

В новом графе существует частичное дерево $H = (X, V_{n-1})$, притом единственное, обладающее наименьшей длиной; в силу теоремы 3, V_{n-1} не содержит ребер $w_k \notin U$, ибо

$$l(w_k) > \sum_{u \in U} l(u).$$

Поэтому H является частичным деревом исходного графа G , обладающим наименьшей суммарной длиной.

Заметим, что если длины всех ребер различны, то дерево H — единственное. Заметим также, что можно было бы действовать двойственным образом: удалять шаг за шагом самые длинные ребра, до тех пор пока это удаление не нарушает связности графа.

Алгоритм для нахождения базы независимых циклов. Можно считать граф $G = (X, U)$ связным (в противном случае мы рассмотрели бы каждую компоненту отдельно). Сначала построим, как выше, дерево (X, V_{n-1}) . Пусть $u_1, u_2, \dots, u_{m-n+1}$ — ребра множества U , не принадлежащие V_{n-1} ; добавление к дереву (X, V_{n-1}) любого из этих ребер, скажем u_k , приводит к появлению элементарного цикла μ_k , притом единственного [свойство (4)]. Но циклы $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m-n+1}$ независимы, потому что каждый из них содержит ребро, не принадлежащее остальным; к тому же количество этих циклов $m - n + 1 = \nu(G)$, значит они образуют базу независимых циклов.

Заметим еще только, что в случае плоского графа базу независимых циклов можно находить гораздо проще, как будет показано впоследствии (теорема 1 гл. 21).

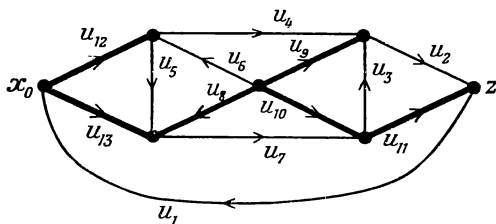
Пример. Рассмотрим симметрическую транспортную сеть (X, U) с входом x_0 и выходом z ; соединим вход с выходом ребром $[x_0, z]$ и произвольно ориентируем все ребра. Поток $\varphi(u)$ по ребру u будет

тогда ≥ 0 , если его направление совпадает с ориентацией ребра u , и ≤ 0 в противоположном случае, следовательно,

$$\sum_{u \in U_x} \varphi(u) = 0 \quad (x \in X).$$

Займемся решением следующей задачи.

Определить потоки φ , принимающие на ребрах u_1, u_2, \dots, u_k заданные значения $\varphi(u_1) = \lambda_1, \varphi(u_2) = \lambda_2, \dots, \varphi(u_k) = \lambda_k$.



Р и с. 16—1.

Допустим, например, что в графе G , изображенном на рис. 16—1, требуется получить

$$\varphi(u_1) = 6, \quad \varphi(u_2) = \varphi(u_3) = 1, \quad \varphi(u_4) = \varphi(u_5) = \varphi(u_6) = 2.$$

Здесь можно выявить дерево (показанное жирными линиями), удаляя ребра u_1, u_2, \dots, u_6 с предписанными значениями φ , а также ребро u_7 ; каждое ребро u_i ($i \leq 6$) определяет вместе с этим деревом некоторый элементарный цикл μ_i , притом единственный, по которому должен циркулировать замкнутый поток, равный $\varphi(u_i) = \lambda_i$ [по μ_7 будет циркулировать замкнутый поток с произвольным значением $\varphi(u_7) = \lambda$].

Складывая эти потоки отдельно для каждого ребра, мы получим искомый поток (который в данном случае будет зависеть от параметра λ). Поток $\varphi(u)$ по каждому ребру дается следующей таблицей:

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}
Поток по μ_1 :	+6							-6		+6	+6		+6
по μ_2 :		+1							+1	-1	-1		
по μ_3 :			+1						-1	+1			
по μ_4 :				+2				+2	-2			+2	-2
по μ_5 :					+2							+2	-2
по μ_6 :						+2		-2				-2	+2
по μ_7 :							$+\lambda$	$+\lambda$		$-\lambda$			
$\varphi =$	6	1	1	2	2	2	λ	$\lambda - 6$	-2	$6 - \lambda$	5	2	4

Если удаление ребра с предписанным значением φ нарушает связность графа, то задача, вообще говоря, не имеет решения.

Аналитическое исследование

Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij}^I)$ с m строками и n столбцами и положим $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $M = \{1, 2, \dots, m\}$. Часто бывает удобно записывать матрицу A в виде a_M^N ; при этом если $I \subset M$, $J \subset N$, то a_I^J обозначает подматрицу, полученную из A вычеркиванием тех столбцов, номера которых не принадлежат I , и тех строк, номера которых не принадлежат J . Напомним прежде всего две формулы из теории определителей.

Формула Лапласа¹⁾. Пусть a_N^N — квадратная матрица порядка n , а число $k \leq n$; тогда

$$\begin{aligned} \text{Det}(a_N^N) = & \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_{k-1} + 1 + \dots + k} \text{Det}(a_{\{1, 2, \dots, k\}}^{\{i_1, i_2, \dots, i_k\}}) \times \\ & \times \text{Det}(a_{N \setminus \{1, 2, \dots, k\}}^{N \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}}) \end{aligned}$$

(при $k = 1$ получается формула разложения определителя по первой строке).

Формула Бинэ — Коши²⁾. Пусть a_N^N и b_N^N — две квадратные матрицы n -го порядка, $K = \{1, 2, \dots, k\}$, $k \leq n$; тогда

$$\text{Det}(a_N^K b_K^N) = \sum_{\substack{I \subset N \\ |I|=k}} \text{Det}(a_I^K) \cdot \text{Det}(b_K^I).$$

При $k = n$ получается формула для определителя произведения двух квадратных матриц.

Рассмотрим теперь граф G с n вершинами и m ребрами ($m \leq n$); произвольно ориентируя ребра, составим матрицу инцидентий для дуг $S = s_M^N$. Квадратная матрица s_M^M соответствует вершинам x_1, x_2, \dots, x_m и дугам u_1, u_2, \dots, u_m ; пара, образованная такого рода множествами вершин и дуг, называется *линейной конфигурацией* H . Она, вообще говоря, не будет графом, так как ребро может входить в H без своих граничных точек („плавающее“ ребро) или

¹⁾ См., например, Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств. — *Прим. перев.*

²⁾ См., например, Гантмахер Ф. Р., Теория матриц. — *Прим. перев.*

только с одной из двух граничных точек („болтающееся“ ребро) Имеет место

Теорема 4. Пусть линейная конфигурация H составлена из t вершин x_1, x_2, \dots, x_m и t дуг u_1, u_2, \dots, u_m ; если H содержит дуги некоторого цикла, то $\text{Det}(s_M^M) = 0$.

Действительно, допустим, что u_1, u_2, \dots, u_k образуют цикл и что вершины H на этом цикле имеют нумерацию x_1, x_2, \dots, x_i (где $i \leq k$); можно написать

$$s_M^M = \begin{bmatrix} s_K^K & s_{M-K}^K \\ 0 & s_{M-K}^{M-K} \end{bmatrix}.$$

По формуле Лапласа

$$\text{Det}(s_M^M) = \pm \text{Det}(s_K^K) \cdot \text{Det}(s_{M-K}^{M-K}) + 0.$$

Если $i = k$, то

$$\text{Det}(s_K^K) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(поскольку сумма векторов-строк равна нулевому вектору). Далее, если $i < k$, то $\text{Det}(s_K^K) = 0$ потому, что k -я строка состоит из одних нулей. Таким образом, всегда $\text{Det}(s_M^M) = 0$.

Теорема 5. Граф G с $m+1$ вершинами x_1, x_2, \dots, x_{m+1} и t ребрами u_1, u_2, \dots, u_m является деревом тогда и только тогда, когда определитель квадратной матрицы s_M^M , полученной из матрицы инциденций s_M^N вычеркиванием $(m+1)$ -й строки, равен $+1$ или -1 ; во всех остальных случаях этот определитель равен нулю.

1° Пусть G — граф порядка $n = m+1$, для которого $\text{Det}(s_M^M) \neq 0$; в силу теоремы 4, G не содержит циклов; так как, кроме того, G имеет $n-1$ ребер, то он представляет собой дерево [теорема 1, свойство (2)].

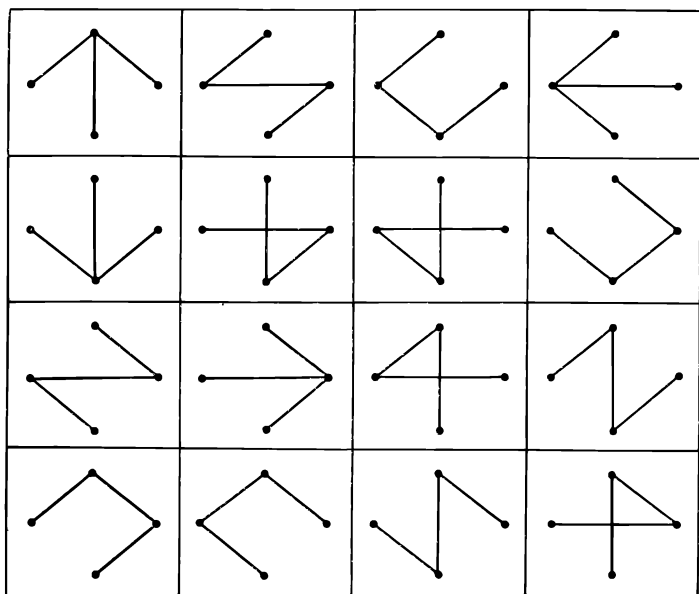
2° Пусть G — дерево с вершинами x_1, x_2, \dots, x_{m+1} ; не трогая x_{m+1} , будем менять нумерацию дуг и остальных m вершин [что может изменить только знак $\text{Det}(s_M^M)$, так как такое изменение нумерации означает перестановку строк и столбцов в определителе]. В силу теоремы 2 дерево G имеет висячую вершину, отличную от x_{m+1} ; эту вершину обозначим через x_1 , а инцидентное ей ребро —

через u_1 ; удалив x_1 и u_1 , опять найдем висячую вершину x_2 и инцидентное ей ребро u_2 , и т. д. ... В новой нумерации будем иметь

$$\text{Det}(s_M^M) = \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ s_1^2 & \pm 1 & 0 \dots 0 \\ s_1^3 & s_2^3 & \pm 1 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1^m & & \dots & \pm 1 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Ч. И Т. Д

Теорема 6 (Доказательство Трента [8]). *В графе G без петель число различных деревьев, представляющих собой частичные*



Р и с. 16—2.

графы G , равно минору любого из элементов главной диагонали квадратной матрицы (b_j^i) порядка n , где

$$b_j^i = \begin{cases} |\Gamma x_i| & \text{при } i = j; \\ -1 & \text{при } i \neq j, [x_i, x_j] \in U; \\ 0 & \text{при } i \neq j, [x_i, x_j] \notin U. \end{cases}$$

Придадим ребрам G произвольную ориентацию и образуем матрицу инцидентий $S = s_M^N$ для дуг. Общий элемент матрицы SS^* равен

$$\langle s^i, s_j^* \rangle = \langle s^i, s^j \rangle = s_1^i s_1^j + s_2^i s_2^j + \dots + s_m^i s_m^j =$$

$$= \begin{cases} |\Gamma x_i| & \text{при } i = j; \\ -1 & \text{при } i \neq j, [x_i, x_j] \in U; \\ 0 & \text{при } i \neq j, [x_i, x_j] \notin U. \end{cases}$$

Таким образом, $\langle s^i, s_j^* \rangle = b_j^i$; если положить $K = \{1, 2, \dots, k = n-1\}$, то минор элемента b_n^n в силу формулы Бинэ — Коши равен

$$\Delta_n = \text{Det}(b_K^K) = \text{Det}(s_M^K \cdot s_K^M) =$$

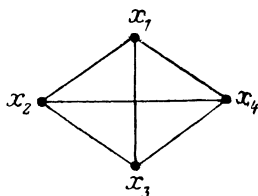
$$= \sum_{\substack{I \subseteq M \\ |I| = n-1}} \text{Det}(s_I^K) \cdot \text{Det}(s_K^{*I}) = \sum_{\substack{I \subseteq M \\ |I| = n-1}} |\text{Det}(s_I^K)|^2.$$

На основании теоремы 5 последняя сумма как раз выражает число деревьев с n вершинами, которые можно получить из G .

ПРИМЕР. Граф, изображенный на рис. 16—2а, имеет 16 частичных деревьев; таково значение

минора

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 16.$$



Р и с. 16—2а.

Так как граф полный, то этот же результат можно было бы получить более прямым путем, замечая, что общее число различных деревьев с $n = 4$ вершинами равно $n^{n-2} = 4^2 = 16$.

Все 16 частичных деревьев приведены на рис. 16—2.

Прадеревья

Конечный граф (X, U) есть *прадеревом* с корнем $x_1 \in X$, если

- 1° в каждую вершину $\neq x_1$ заходит одна-единственная дуга;
- 2° в x_1 не заходит ни одна дуга;
- 3° (X, U) не содержит контуров.

Теорема 7. *Всякое прадерево является деревом.*

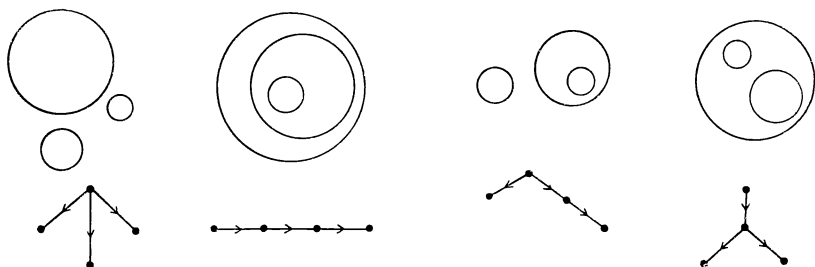
Пусть H — прадерево с корнем x_1 ; в силу 3° оно имеет столько же дуг, сколько ребер. Если n — число вершин, m — число ребер, то

$$m = n - 1.$$

Кроме того, H не содержит циклов, ибо в нем нет контуров, а всякий цикл, не являющийся контуром, имеет вершину, в которую заходит не менее двух дуг.

Поэтому H — дерево.

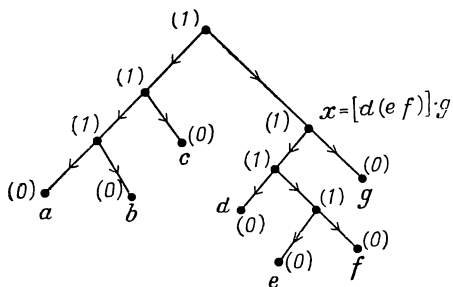
Внешний вид прадерева представить себе легко: это дерево, каждое ребро которого однозначно ориентировано и для любой вершины x которого существует путь от x_1 к x (поскольку путешественник, находящийся в x и желающий проходить дуги графа в направлении, противоположном ориентации, не будет вынужден остановиться ни в одной вершине, кроме x_1).



Р и с. 16—3.

ПРИМЕР 1 (планиметрия). Рассмотрим на плоскости $n - 1$ попарно непересекающихся окружностей. Каждый случай взаимного расположения этих окружностей можно представить прадеревом с n вершинами (имеющим в качестве корня x_1 „окружность бесконечного радиуса“).

При $n = 4$ возможны четыре случая расположения, которые, как показано на рис. 16—3, соответствуют четырем прадеревьям.



Р и с. 16—4.

называют *моноидом* результат некоторого числа этих операций, например $u = [(a \cdot b) \cdot c] \cdot ([d \cdot (e \cdot f)] \cdot g)$. Этому моноиду мы поставим в соответствие изображенное на рис. 16—4 прадерево, являющееся „бифуркантом“: для каждой вершины x имеем $|\Gamma x| = 0$ или 2.

В случае некоммутативной операции \cdot надо использовать топологический граф, то есть граф, эффективно представленный в ориентированной плоскости. Лукасевич предложил задавать моноид u

ПРИМЕР 2. Теория скобок Лукасевича (J. Lukasiewicz). Рассмотрим множество $A = \{a, b, c, \dots\}$ и операцию \cdot в нем, которая коммутативна, но не ассоциативна: например, $a \cdot (b \cdot c) \neq (a \cdot b) \cdot c$. В алгебре

последовательностью $abcdefg$, за которой идет последовательность 1110001101000 (полученная заменой висячих вершин символом 0, невисячих — символом 1 и записью этих символов в порядке, который ясен из приведенного примера)¹⁾.

Мы поставим для прадеревьев такие же задачи, как и для деревьев; в частности: сколько у данного (ориентированного) графа G имеется частичных графов, представляющих собой прадеревья? Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица смежности графа G ; образуем диагональную матрицу $D = (d_{ij})$, где

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ |\Gamma^{-1}x_i| & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Матрицу $D - A = (d_{ij} - a_{ij})$ можно записать в виде

$$D - A = \begin{pmatrix} \sum_{i \neq 1} a_1^i & -a_2^1 & \dots & -a_n^1 \\ -a_1^2 & \sum_{i \neq 2} a_2^i & \dots & -a_n^2 \\ -a_1^3 & -a_2^3 & \dots & -a_n^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1^n & -a_2^n & \dots & \sum_{i \neq n} a_n^i \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен 0 (так как сумма ее векторов-строк есть нуль-вектор).

Минор этой матрицы, полученный вычеркиванием k -й строки и k -го столбца, обозначим через $\Delta_k = \Delta_k(a_1, a_2, \dots, a_n)$; он не зависит от вектора a_k .

Замечание. $\Delta_k(a_1, a_2, \dots, a_n)$ есть линейная функция от векторов-столбцов a_j , т. е.

$$\Delta_k(a_1 + a'_1, a_2, \dots, a_n) = \Delta_k(a_1, a_2, \dots, a_n) + \Delta_k(a'_1, a_2, \dots, a_n),$$

$$\Delta_k(\lambda a_1, a_2, \dots, a_n) = \lambda \Delta_k(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Доказывается непосредственно.

Теорема 8. Пусть A — матрица смежности графа G без петель, имеющего $m = n - 1$ дугу; граф G является прадеревом с корнем x_1 тогда и только тогда, когда $\Delta_1 = 1$; во всех остальных случаях $\Delta_1 = 0$.

¹⁾ Из этого замечания легко вывести, что количество различных прадеревьев-бифуркантов с n висячими вершинами равно

$$\frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}.$$

1° Если G — прадерево с корнем x_1 , то элементы d_i^i равны $|\Gamma^{-1}x_i| = 1$ (при $i = 2, 3, \dots, n$); перенумеруем вершины так, чтобы при следовании вдоль любого пути индексы шли в возрастающем порядке (это всегда возможно, поскольку G — прадерево); тогда

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -a_3^2 & -a_4^2 & \dots & -a_n^2 \\ 0 & 1 & -a_4^3 & \dots & -a_n^3 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -a_n^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2° Допустим, что $\Delta_1 \neq 0$, и покажем, что G — прадерево с корнем x_1 . В каждую вершину x_k (при $k \neq 1$) заходит по крайней мере одна дуга графа G (в противном случае $(k-1)$ -й столбец в Δ_1 был бы нулевым и мы имели бы $\Delta_1 = 0$).

Так же, как в теореме 5, доказываем, что граф G — связный и антисимметрический (иначе имели бы $\Delta_1 = 0$). Но связный граф с $n-1$ ребрами есть дерево [свойство (3)]. Во всякую отличную от x_1 вершину заходит ровно одна дуга (ибо существует ровно $n-1$ дуг); поэтому G — прадерево с корнем x_1 .

Теорема 9 (Татт, Ботт). Пусть A — матрица смежности графа G без петель; количество прадеревьев с корнем x_1 , являющихся частичными графами G , равно Δ_1 .

В самом деле, обозначим через $e_k = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ n -мерный вектор, k -я координата которого равна 1, а остальные — нулю. Положим

$$K_i = \{k / (x_k, x_i) \in U\}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_1(a_2, a_3, \dots, a_n) &= \Delta_1\left(\sum_{k_2 \in K_2} e_{k_2}, \sum_{k_3 \in K_3} e_{k_3}, \dots\right) = \\ &= \sum_{\substack{k_2 \in K_2 \\ k_3 \in K_3 \\ \dots}} \Delta_1(e_{k_2}, e_{k_3}, \dots, e_{k_n}). \end{aligned}$$

Но, в силу теоремы, 8 минор $\Delta_1(e_{k_2}, e_{k_3}, \dots, e_{k_n})$ равен 1, когда $n-1$ дуг $(x_{k_2}, x_2), (x_{k_3}, x_3), \dots$ образуют прадерево с корнем x_1 , и равен 0 во всех остальных случаях. Отсюда и следует сформулированный результат.

Замечание 1. Проведенные выше рассуждения в действительности доказывают более сильный результат, который можно выразить следующим образом: рассмотрим сеть, образованную графом G без петель, с пропускными способностями $c(u)$, и пусть $C = (c_j^i)$ — „обобщенная матрица смежности“, у которой $c_j^i = c(x_i, x_j)$. образуем

диагональную матрицу D , где $d_i^i = \sum_{k \neq i} c(x_k, x_i)$, и составим определитель $\Delta = \text{Det}(D - C)$; если $H = (X, \Gamma)$ — прадерево с корнем x_1 , то положим

$$c(H) = \prod_{\substack{x \in X \\ y \in \Gamma x}} c(x, y).$$

Тогда минор Δ_1 определителя Δ равен сумме чисел $c(H)$, где H пробегает все прадерева с корнем x_1 , являющиеся частичными графами G .

Этот результат был установлен Боттом и Мейберри [2] при вычислении определителей некоторых матриц, встречающихся в экономике.

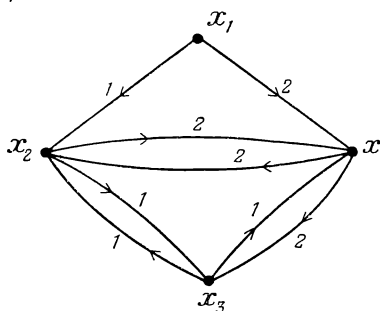


Рис. 16—5.

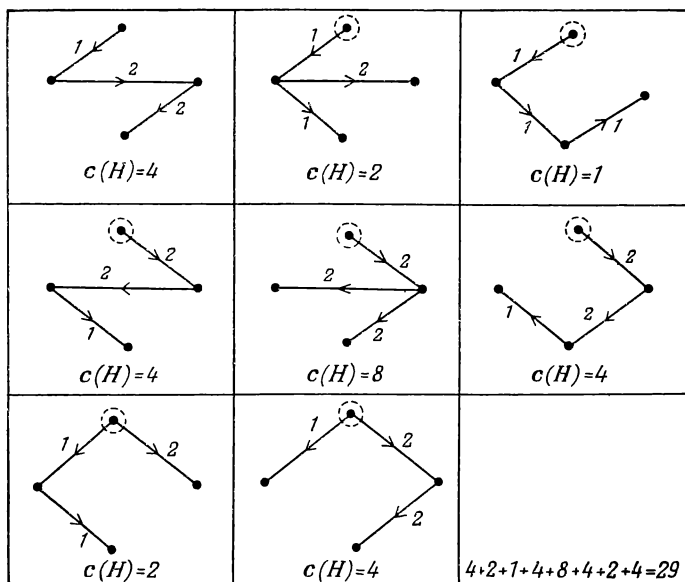


Рис. 16—6.

ПРИМЕР. Рассмотрим определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Ему соответствует матрица

$$D - C = \begin{pmatrix} d_1^1 & -1 & 0 & -2 \\ -c_1^2 & 4 & -1 & -2 \\ -c_1^3 & -1 & 3 & -1 \\ -c_1^4 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

у которой только первый столбец произволен; отсюда получается сеть, изображенная на рис. 16—5.

Складывая все значения $c(H)$, указанные в таблице на рис. 16—6, получим 29; читатель может проверить, что этому числу как раз и равен определитель Δ_1 .

Замечание 2. Пусть A — матрица смежности симметрического графа G без петель; число симметрических деревьев, являющихся частичными графами G , равно числу прадеревьев с корнем x_k или, в силу теоремы 9, равно

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n.$$

Таким образом, мы снова получаем утверждение теоремы 6.

Задача Эйлера

Эйлеровы циклы

Одна из наиболее старых задач Геометрии Положения, поставленная Эйлером, может быть сформулирована следующим образом: назовем *эйлеровой цепью* (соответственно *эйлеровым циклом*) цепь (соответственно цикл), содержащую все ребра графа и притом только по одному разу; как узнать, обладает ли данный граф *эйлеровой цепью* или *эйлеровым циклом*?

Пример 1. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 17—1; можно ли нарисовать этот граф, не отрывая пера от бумаги и не проходя по уже нарисованной линии вторично? Перепробовав множество комбинаций, читатель, даже неосве-

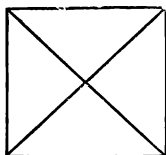


Рис. 17—1.

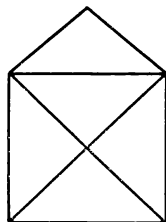


Рис. 17—2.

домленный, в конце концов вынужден будет предположить, что эта задача неразрешима. Напротив, граф, изображенный на рис. 17—2, можно нарисовать одним росчерком; почему?

Пример 2 (Эйлер). Через город Кёнигсберг протекает река Прегель, омывающая остров Кнейпхоф; на реке имеется семь мостов, расположение которых показано на рис. 17—3. Может ли пешеход обойти все мосты, пройдя по каждому из них только один раз?

Эта задача увлекала жителей Кёнигсберга в 1736 году, пока Эйлер не доказал ее неразрешимость.

Рассматривая 2-граф G , изображенный на рис. 17—4, вершины которого соответствуют районам a, b, c, d , а каждое ребро изображает мост, мы видим, что задача сводится к нахождению эйлеровой цепи.

Теорема 1. *Мультиграф G обладает эйлеровой цепью тогда и только тогда, когда он связан и число вершин нечетной степени ¹⁾ равно 0 или 2.*

1° *Условие необходимо*, ибо если эйлерова цепь μ существует, то граф G , очевидно, связан; далее, нечетной степенью могут обладать только начальная и конечная вершины μ (если они не совпадают), поэтому вершин нечетной степени может быть только 0 или 2.

2° *Условие достаточно*. Мы докажем более точное утверждение:

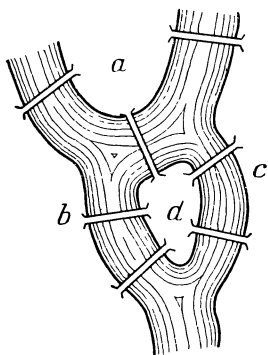


Рис. 17—3.

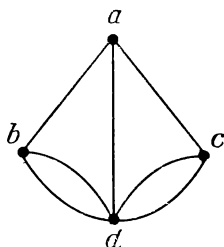


Рис. 17—4.

если имеются две вершины a и b нечетной степени, то существует эйлерова цепь, начинающаяся в a и оканчивающаяся в b ; если вершин нечетной степени нет, то существует эйлеров цикл.

Допустим, что это утверждение справедливо для графов, имеющих менее t ребер, и докажем его справедливость для графа G с t ребрами. Для определенности предположим, что G имеет две вершины нечетной степени: a и b .

Путешественник, который отправляется из a в любом направлении с намерением не проходить по одному и тому же ребру дважды, определит своим движением цепь μ . Если путешественник пришел в некоторую вершину $x \neq b$, то количество ребер, пройденных им и инцидентных x , нечетно при $x \neq a$ и четно при $x = a$, и поэтому он может покинуть x по еще не пройденному ребру; если же путешественник не имеет возможности идти дальше, то это означает, что он находится в b . Однако при этом произвольном маршруте от a к b могли быть пройдены не все ребра; в частичном графе G' , образованном оставшимися ребрами, все вершины имеют четную степень.

Пусть C_1, C_2, \dots, C_k — компоненты G' , содержащие хотя бы по одному ребру; согласно предположению, все эти компоненты обладают эйлеровыми циклами μ_1, μ_2, \dots ; так как граф G связан, цепь μ

¹⁾ Степенью вершины называется число ребер, инцидентных этой вершине. — *Прим. ред.*

встречает все C_i ; допустим, что первые встречи происходят в вершинах $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \dots, x_k \in C_k$ (в указанном горячке).

Рассмотрим теперь цепь

$$\mu[a, x_1] + \mu_1 + \mu[x_1, x_2] + \mu_2 + \dots + \mu[x_k, b].$$

Это и есть эйлерова цепь графа G , идущая из a в b .

Ч. И Т. Д.

Читатель может теперь одним взглядом убедиться в неразрешимости задачи о кёнигсбергских мостах (пример 2).

Замечание. Таким же способом доказывается, что если связный мультиграф имеет 4 вершины нечетной степени, то его можно нарисовать двумя росчерками, и вообще при наличии $2q$ вершин нечетной степени — q росчерками.

Алгоритм для непосредственного выявления эйлерова цикла [Флёри (Fleury)]. Рассмотрим связный мультиграф G , все вершины которого имеют четную степень, и постараемся нарисовать его одним росчерком, *не прибегая в процессе построения к исправлениям уже начерченной части траектории*. Достаточно придерживаться следующего правила:

1° *Выходим из произвольной вершины a ; каждое пройденное ребро зачеркиваем.*

2° *Никогда не идем по такому ребру u , которое в рассматриваемый момент является перешейком* (т. е. при удалении которого граф, образованный незачеркнутыми ребрами, распадается на две компоненты связности, имеющие хотя бы по одному ребру¹).

Соблюдая это правило, мы всегда будем находиться в благоприятном положении, потому что когда мы находимся в $x \neq a$, граф (из незачеркнутых ребер) имеет две вершины нечетной степени: x и a ; если отбросить изолированные вершины, то останется связный граф, который в силу теоремы 1 имеет эйлерову цепь, начинающуюся в x .

Осталось доказать, что всегда возможно соблюдать это правило, то есть что путешественник, придя на перекресток x , наверняка имеет в своем распоряжении непройденное ребро, не являющееся (в данный момент) перешейком. Действительно, если бы все инцидентные x ребра были перешейками, то их было бы по меньшей мере два (так как в случае $|U_x| = 1$ ребро, инцидентное x , может быть только висячим); два перешейка вели бы в две не связанные друг с другом компоненты, каждая из которых содержит хотя бы одну вершину нечетной степени. Но это невозможно, так как a — единственная вершина нечетной степени (отличная от x).

¹) И, разумеется, не выбираем ребра, идущего в a , пока есть другие возможности. — *Прим. перев.*

Эйлеровы контуры

Рассмотренные выше понятия интересно распространить на ориентированные графы; *эйлеров контур* в ориентированном графе (X, U) — это контур, содержащий все дуги, и только по одному разу. Каковы те графы, которые обла- дают эйлеровыми контурами?

Граф называется *псевдосимметри- ческим*, если в каждой его вершине число исходящих дуг равно числу за- ходящих, т. е.

$$|U_x^+| = |U_x^-| \quad (x \in X).$$

Эта терминология оправдывается тем, что всякий симметрический граф является в то же время псевдосимме- трическим; имеет место

Теорема 2. *Граф обладает эйлеровым контуром тогда и только тогда, когда он является связным и псевдосимметрическим.*

Доказательство точно такое же, как для теоремы 1.

ПРИМЕР [Постумус (Posthumus)].

Какова самая длинная круговая после- довательность из цифр 0 и 1, в кото-

рой никакой отрезок из k цифр не повторяется? Так как различных строчек из 0 и 1 существует 2^k , такая последовательность не может иметь более 2^k цифр; покажем с помощью теоремы 2, что *можно эффективно построить* искомую круговую последовательность из 2^k цифр.

Рассмотрим граф G , вершинами которого служат всевозможные $(k-1)$ -строчки из 0 и 1, и соединим дугой каждую вершину $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})$ с двумя вершинами $(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{k-1}, 0)$ и $(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{k-1}, 1)$. Граф G — псевдосимметрический, поэтому он имеет эйлеров контур. Если $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})$ — первая вершина этого контура, $(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$ — вторая, $(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{k+1})$ — третья и т. д., то искомая последовательность будет $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots$.

При $k=4$ граф, изображенный на рис. 17—5, дает нам не- сколько круговых последовательностей из $2^4=16$ цифр, а именно

$$abcdefghijklmnpq = 0000101001101111,$$

$$abcdkijefghlmnpq = 0000101101001111,$$

$$abcdkipghlmnjefg = 0000101100111101,$$

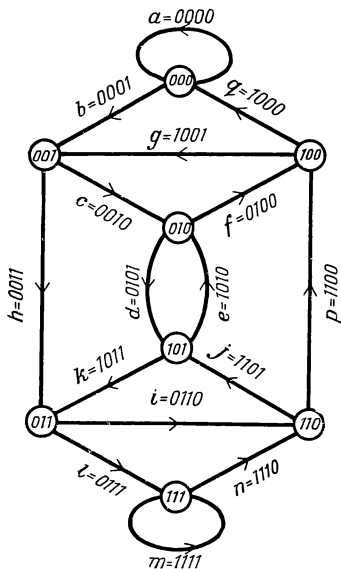


Рис. 17—5.

$$\begin{aligned}
 abc f g h i j e d k l m n p q &= 0000100110101111, \\
 ab h i j k l m n p g c d e f q &= 0000110111100101, \\
 ab h i j e d k l m n p g c f q &= 0000110101111001, \\
 ab h i j e f g c d k l m n p q &= 0000110100101111, \\
 ab h i p g c d k l m n j e f q &= 0000110010111101.
 \end{aligned}$$

(Мы опустили остальные круговые последовательности, которые получаются перестановкой i и lmn .) Найдено 16 решений ¹⁾).

Некоторые авторы усиленно занимаются подсчетом различных эйлеровых контуров псевдосимметрического графа; эта задача тесно связана с задачей подсчета прадеревьев, решенной выше (гл. 16). Взаимосвязи между эйлеровыми контурами и прадеревьями являются весьма тесными, и мы прежде всего отметим следующий результат:

Теорема 3. Пусть G — связный псевдосимметрический граф, x_1 — одна из его вершин; G допускает в качестве частичного графа некоторое прадеревье H с корнем x_1 , которое можно построить следующим образом: проходим все дуги G , отправившись из x_1 , и составляем H из всех тех дуг, которые привели нас в ту или иную вершину впервые.

H действительно есть прадеревье с корнем x_1 , так как

1° всякая вершина $\neq x_1$ является концом одной-единственной дуги;

2° x_1 не является концом никакой дуги;

3° H не содержит контуров (ибо если из x в y идет некоторый путь, образованный дугами H , то вершина x пройдена раньше y и в H не существует путей из y в x).

Теорема 4 (Аарден-Эренфест, де Брёйн [1]). Пусть G — связный и псевдосимметрический граф, Δ_1 — число прадеревьев с корнем x_1 , являющихся частичными графами G , и r_k — полустепень исхода (или захода) вершины x_k . Тогда число различных эйлеровых контуров графа G равно

$$\Delta_1 \prod_{k=1}^n (r_k - 1)!,$$

где n — число вершин графа G .

Заметим, что два эйлеровых контура не считаются различными, если один можно получить из другого круговой перестановкой. Заметим также, что число Δ_1 известно из теоремы 9 (гл. 16).

¹⁾ Эта задача применяется в технике связи для отыскания положения барабана, градуированного двумя видами делений, с помощью читающей головки, способной за один раз прочесть k делений. Аналогичная задача встречается в криптографии в следующем виде: найти слово, в котором каждое размещение k букв из алфавита фигурирует один и только один раз.

Рассмотрим прадерево H с корнем x_1 , являющееся частичным графом для G , и покажем, что существует ровно

$$\prod_{k=1}^n (r_k - 1) !$$

таких эйлеровых контуров, у которых каждая дуга, приводящая нас в любую вершину впервые, принадлежит H . Пронумеруем числами от 1 до r_k дуги, заходящие в x_k :

$$U_{x_k}^- = \{u_k(1), u_k(2), \dots, u_k(r_k)\};$$

нумерацию произведем так, чтобы $u_k(r_k)$ была дугой прадерева H , заходящей в x_k (если $k \neq 1$). Предполагая дугу $u_1(1)$ раз навсегда фиксированной, будем иметь в точности

$$\prod_{k=1}^n (r_k - 1) !$$

возможных нумераций. Каждой нумерации соответствует один и только один контур по следующему закону: начиная с $u_1(1)$, обходим все дуги графа в направлении, противоположном их ориентации; всякий раз, находясь в x_k , выбираем ту еще не пройденную дугу из $U_{x_k}^-$, которая обладает наименьшим номером.

Таким способом будет определен контур, ибо процесс обхода может оборваться только в точке x_1 (во всякой другой вершине, в которую мы приходим, всегда остается ребро, по которому можно снова выйти, так как граф псевдосимметрический). Покажем, что полученный контур является эйлеровым.

Действительно, если бы это было не так, то имелась бы непройденная дуга $u_k(j)$; поскольку $r_k \geq j$, дуга $u_k(r_k)$ тоже не могла быть пройдена; в ее начало x_p в свою очередь заходит некоторая непройденная дуга $u_p(r_p)$, и т. д. Все эти непройденные дуги принадлежат прадереву H , поэтому мы в конце концов доберемся до корня x_1 ; но это невозможно, ибо раз мы в свое время оказались в x_1 и не смогли оттуда выйти, то все дуги, инцидентные x_1 , были уже пройдены.

В итоге каждой нумерации отвечает свой эйлеров контур, оканчивающийся фиксированной дугой $u_1(1)$ и такой, что каждая его дуга, приводящая в свою конечную вершину впервые, принадлежит прадереву. Тем самым теорема доказана ¹⁾.

¹⁾ Когда число дуг графа $m \geq 2n + 1$, при исследовании эйлеровых контуров обнаруживается любопытное комбинаторное свойство, недавно сформулированное Шютценбергером (М. Р. Schützenberger). Именно, будем рассматривать эйлеров контур μ как подстановку дуг графа и говорить, что μ — *четный* или *нечетный*, смотря по тому, четно или нечетно число беспорядков подстановки; тогда в графе G порядка n с числом дуг $m \geq 2n + 1$

Следствие. В псевдосимметрическом графе число прадеревьев с корнем x_k , являющихся частичными графами, не зависит от выбора вершины x_k .

В самом деле, теорему 3 можно с таким же успехом сформулировать для вершины x_k вместо x_1 ; так как число эйлеровых контуров от этого не изменится, то $\Delta_1 = \Delta_k$.

(Читатель может таким способом проверить, что число эйлеровых контуров графа, изображенного на рис. 17—5, равно 16.)

среди эйлеровых контуров, начинающихся с данной дуги, имеется столько же четных, сколько нечетных.

Заметим, что при $m = 2n$ это утверждение неверно, как показывает следующий пример: составим граф с дугами u_1, u_2, \dots, u_n элементарного контура, проходящего через n вершин, и с петлями $u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{2n}$ во всех этих вершинах; для каждой заданной дуги существует только один эйлеров контур, начинающийся этой дугой, и утверждение уже поэтому неверно.

Можно показать, что упомянутое свойство графов порядка n равносильно одному свойству матриц n -го порядка, имеющему важное значение в алгебре (а именно теореме Амицура и Левицкого, см. [5]).

Паросочетание произвольного графа

Теория чередующихся цепей

Мы обозначаем здесь через \bar{G} граф (неориентированный) с вершинами $\bar{a}, x_1, x_2, \dots, x_n$. В \bar{G} будем различать две категории ребер: *сильные* ребра, обозначаемые жирными линиями, и *слабые* ребра, обозначаемые тонкими линиями. Наконец, мы предполагаем, что все ребра, инцидентные точке \bar{a} , называемой *началом* графа \bar{G} , — сильные.

Чередующейся цепью называется такая цепь $\mu = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ графа \bar{G} , что

1° из двух последовательных ребер v_j и v_{j+1} непременно одно сильное, а другое слабое;

2° цепь μ — простая, т. е. никакое ребро не встречается в μ более одного раза.

Если существует чередующаяся цепь μ , соединяющая вершину \bar{a} с x , то последнее ребро этой цепи мы пометим стрелкой, направленной к x ; таким образом, каждое ребро графа \bar{G} может оказаться ориентированным в обоих направлениях, или только в одном направлении, или остаться неориентированным.

Если в вершину x заходит хотя бы одно ориентированное сильное ребро, но не заходит ни одно ориентированное слабое ребро, то вершину x назовем *сильной*; множество всех сильных вершин графа \bar{G} будем обозначать через E .

Если в вершину x заходит хотя бы одно слабое ребро, но не заходят сильные ребра, то вершину x назовем *слабой*; множество слабых вершин будем обозначать через F .

Если в вершину x заходят как сильные, так и слабые ребра, то назовем ее *смешанной*; множество смешанных вершин будем обозначать через M .

Наконец, если в вершину x вообще не заходит ни одно ориентированное ребро, то ее назовем *недостижимой*; множество недостижимых вершин будем обозначать через I .

Несколько по-иному мы распространяем эту терминологию на вершину \bar{a} , которую мы выделяем среди остальных как *начало*

графа \bar{G} : мы считаем вершину \bar{a} *слабой*, если не существует чередующейся цепи, идущей из \bar{a} обратно в \bar{a} , и *смешанной* в противном случае.

Так как всякая вершина \bar{G} является или слабой, или сильной, или смешанной, или недостижимой, то $E \cup F \cup M \cup I = X$; непосредственно замечаем:

Теорема 1. *Две сильные вершины могут быть соединены только сильным ребром; две слабые вершины могут соединяться только слабым ребром; смешанная вершина не может соединяться с недостижимой никаким ребром; сильная вершина может соединяться с недостижимой только сильным ребром; слабая и недостижимая вершины могут быть соединены только слабым ребром.*

Подытожим сказанное при помощи таблицы:

	E	F	M	I
E	сильное			сильное
F		слабое		слабое
M				X
I	сильное	слабое	X	

Подграф графа \bar{G} , порожденный множеством вершин M^1), имеет компоненты связности, которые мы обозначим через M_1, M_2, \dots ; будем говорить, что цепь μ *заходит в M_1 по ребру $[a, b]$* , если μ имеет вид

$$\mu = [\bar{a}, a_1, a_2, \dots, a_k = a, b_1 = b, b_2, \dots, b_l],$$

где

$$\bar{a}, a_1, a_2, \dots, a_k \notin M_1;$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_l \in M_1.$$

Лемма 1. *Пусть $\bar{a} \notin M_1, x \in M_1$; если некоторая чередующаяся цепь $\mu[\bar{a}, x]$ заходит в M_1 по ребру $[a, b]$ и оканчивается сильным (соответственно слабым) ребром, то существует также чередующаяся цепь $\mu'[\bar{a}, x]$, заходящая в M_1 по ребру $[a, b]$ и оканчивающаяся слабым (соответственно сильным) ребром.*

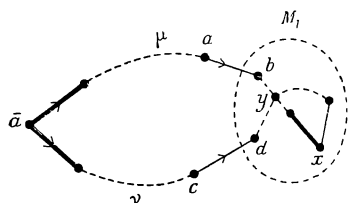
¹⁾ При этом предполагается $M \neq \emptyset$. — Прим. перев.

В самом деле, поскольку x — смешанная вершина, существует чередующаяся цепь $\nu[\bar{a}, x]$, которая оканчивается слабым ребром. Так как $\bar{a} \notin M_1$, $x \in M_1$, то в $\nu[\bar{a}, x]$ существуют ребра, у которых одна из граничных точек принадлежит $X \setminus M_1$, а другая принадлежит M_1 ; пусть $[c, d]$ — последнее ребро этого типа.

Пусть, наконец, μ — первая точка цепи μ , принадлежащая $\nu[d, x]$ (такая точка всегда существует). Если $\mu[b, y]$ и $\nu[d, y]$ оканчиваются ребрами одной и той же категории, то теорема доказана, так как искомой чередующейся цепью будет

$$\mu' = \mu[\bar{a}, y] + \nu[y, x].$$

Поэтому можно предполагать, что это не так; но тогда $[a, b] = [c, d]$, потому что в противном случае цепь $\mu[\bar{a}, y] + \nu[y, c]$ была бы простой чередующейся цепью, значит точка c была бы смешанной и принадлежала M_1 . Отсюда заключаем, что цепь



$$\mu' = \mu[\bar{a}, b] + \nu[d, x]$$

является чередующейся и удовлетворяет поставленным условиям.

Рис. 18—1.

Лемма 2. Пусть $\bar{a} \notin M_1$, $x \in M_1$, и $[a, b]$ — ориентированное ребро, заходящее в M_1 ; тогда существует чередующаяся цепь $\mu[\bar{a}, x]$ из \bar{a} в x , заходящая в M_1 по ребру $[a, b]$.

В самом деле, пусть Y — множество тех вершин из M_1 , которые достижимы с помощью чередующихся цепей, заходящих по $[a, b]$, и пусть Z — множество остальных вершин M_1 . Имеем $Y \neq \emptyset$ (ибо $b \in Y$), и если бы $Z \neq \emptyset$, то существовало бы ребро $[y, z]$, у которого $y \in Y$, $z \in Z$. Покажем, что это приводит к противоречию.

В силу леммы 1 точка u достижима посредством двух чередующихся цепей $\mu_1[\bar{a}, u]$ и $\mu_2[\bar{a}, u]$, заходящих в M_1 по ребру $[a, b]$, причем последние ребра этих цепей являются соответственно сильным и слабым; но тогда точка z достижима посредством чередующейся цепи, заходящей в M_1 по $[a, b]$, что невозможно, так как $z \in Z$.

Теорема Петерсена—Галлаи ([6], [3]). Пусть M_1 — компонента подграфа, порожденного смешанными точками; если $\bar{a} \notin M_1$, то существует одно и только одно ребро, заходящее в M_1 . Если же $\bar{a} \in M_1$, то не существует ребер, заходящих в M_1 .

1° Если $\bar{a} \notin M_1$, то пусть μ — чередующаяся цепь, идущая из \bar{a} в M_1 , и пусть b — первая ее вершина, принадлежащая M_1 . Чередующаяся цепь $\mu[\bar{a}, b]$ заходит в M_1 по ребру $[a, b]$.

Пусть $[c, d]$ — другое ребро, заходящее в M_1 . В силу леммы 2, точка $d \in M_1$ достижима посредством чередующейся цепи, заходящей по $[a, b]$, и в силу леммы 1 можно предполагать, что эта цепь оканчивается ребром не той категории, к которой принадлежит $[c, d]$; но тогда точка c — смешанная, что невозможно, так как $c \notin M_1$.

Следовательно, $[a, b]$ — единственное ребро, заходящее в M_1 .

2° Случай $\bar{a} \in M_1$ можно свести к предыдущему, добавляя вершины \bar{a}_0 и \bar{b}_0 , сильное ребро $[\bar{a}_0, \bar{b}_0]$ и слабое ребро $[\bar{b}_0, \bar{a}]$. Если считать началом \bar{a}_0 , вместо \bar{a} , то ребро $[\bar{b}_0, \bar{a}]$ окажется единственным заходящим в M_1 ; значит, у первоначального графа совсем нет ребер, заходящих в M_1 .

Ч. И Т. Д.

Эта теорема, в частности, показывает, что чередующаяся цепь, которая пересекла M_1 (и вышла из нее), не может вторично встретить эту компоненту; ниже мы познакомимся с применениями этого свойства.

Нахождение частичного графа с заданными степенями вершин

Пусть $G = (X, U)$ — неориентированный граф, каждой вершине x которого отнесено целое число $f(x)$, не превосходящее степени $d_x(U)$; поставим сейчас задачу о построении частичного графа (X, W) , у которого степень вершины x была бы $d_x(W) = f(x)$. Говорят, что множество ребер $W \subset U$ *совместимо* с функцией $f(x)$, если

$$d_x(W) \leq f(x) \quad (x \in X).$$

Для заданного множества W ребра из W будем считать *сильными*, а остальные ребра U — *слабыми*; задача сводится к нахождению множества сильных ребер, совместимого с функцией $f(x)$ и обладающего наибольшим числом элементов.

Эта новая задача имеет некоторую аналогию со следующей задачей, уже рассмотренной в гл. 11: *для заданного ориентированного графа найти частичный граф с наперед заданными полустепенями вершин*. Однако на этот раз мы не станем применять теорию наибольшего потока, а воспользуемся другим средством, каким является теория чередующихся цепей.

Замечание. Задача, которой мы занимаемся, представляет собой линейную программу. В самом деле, положим $b_i = f(x_i)$ и обозначим через (r_{ij}^i) матрицу инцидентий для ребер. Ищутся такие целые

числа ξ_j , равные единице для сильных ребер u_j и нулю для слабых ребер, что

$$\begin{cases} 0 \leq \xi_j \leq 1 & (j = 1, 2, \dots, m); \\ \sum_{j=1}^m r_j^i \xi_j \leq b_i & (i = 1, 2, \dots, n); \\ \sum_{j=1}^m \xi_j \text{ принимает наибольшее значение.} \end{cases}$$

Однако эта линейная программа требует решения в целых числах, а единственное средство, которым мы располагаем, — алгоритм Гомори (см. сноску в гл. 4) — едва ли можно считать удобным. Напротив, необычайно простой „графический“ алгоритм позволяет нам легко находить решения.

Образует мультиграф $\bar{G}(W)$, строя сперва G , добавляя затем начало \bar{a} и соединяя его с каждой *ненасыщенной* точкой x , т. е. с такой вершиной x , для которой $d_x(W) < f(x)$; при этом \bar{a} с x соединяем сильными ребрами в количестве $f(x) - d_x(W)$ штук. Если построенный мультиграф $\bar{G}(W)$ содержит чередующуюся цепь, идущую из \bar{a} обратно в \bar{a} , то достаточно сделать слабые ребра этой цепи сильными, а сильные — слабыми, чтобы получить новое совместимое множество, более многочисленное, чем предыдущее. Ниже мы увидим, что совместимое множество W , которое нельзя более увеличить таким способом, является наибольшим.

Лемма. Пусть \mathcal{W}° — семейство совместимых множеств, для которых не существует чередующихся цепей, идущих из \bar{a} в \bar{a} ; если $W_1 \in \mathcal{W}^\circ$, а W_2 — произвольное совместимое множество, такое, что $W_1 \subset W_2$, то $W_1 = W_2$.

Действительно, в случае $W_2 \supset W_1$ существовало бы ребро $[x, y] \in W_2 \setminus W_1$ и, очевидно, в $\bar{G}(W_1)$ вершины x и y были бы ненасыщенными, поэтому вершина \bar{a} была бы достижима по чередующейся цепи $[\bar{a}, x] + [x, y] + [y, \bar{a}]$, что невозможно, так как $W_1 \in \mathcal{W}^\circ$. (Отметим, что это рассуждение сохраняет силу и при $x = y$.)

Теорема Бержа — Нормана — Рэйбина. Совместимое множество W_0 является наибольшим тогда и только тогда, когда не существует чередующейся цепи, идущей из \bar{a} обратно в \bar{a} ¹⁾.

¹⁾ Приведенное здесь общее утверждение включает одновременно как теорему Бержа [1], так и теорему Нормана — Рэйбина [5]; идея настоящего доказательства принадлежит Рэйбину.

Достаточно доказать, что если совместимое множество W_0 принадлежит определенному выше семейству \mathcal{W}^2 , то это множество — наибольшее. С этой целью рассмотрим наибольшее совместимое множество W_M и выберем его таким, чтобы число $|W_0 \setminus W_M|$ было как можно меньше; если $|W_0 \setminus W_M| = 0$, то $W_0 \subset W_M$, откуда, в силу леммы, $W_0 = W_M$, и наша цель достигнута. Поэтому предположим $|W_0 \setminus W_M| > 0$ и покажем, что это предположение приводит к противоречию.

1° Среди ребер графа G , инцидентных данной вершине x , имеется не меньше принадлежащих $W_M \setminus W_0$, чем принадлежащих $W_0 \setminus W_M$. Действительно, в противном случае мы имели бы

$$d_x(W_M) < d_x(W_0) \leq f(x).$$

Если $u = [x, y] \in W_0 \setminus W_M$, то существует ребро $v = [y, z] \in W_M \setminus W_0$ (иначе $W_M \cup [x, y]$ было бы совместимым множеством, более многочисленным, чем W_M); множество $W' = (W_M \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ — совместимое, ибо

$$d_x(W') = d_x(W_M) + 1 \leq f(x),$$

$$d_y(W') = d_y(W_M) \leq f(y),$$

$$d_z(W') = d_z(W_M) - 1 < f(z).$$

Поэтому оно является наибольшим совместимым множеством (так как $|W'| = |W_M|$); но это невозможно, поскольку

$$|W_0 \setminus W'| < |W_0 \setminus W_M|.$$

2° Не существует простых циклов четной длины, ребра которых попеременно принадлежали бы $W_0 \setminus W_M$ и $W_M \setminus W_0$, ибо если μ — такой цикл, то множество $W' = (W_M \cup \mu) \setminus (W_M \cap \mu)$ совместимо и в силу равенства $|W'| = |W_M|$ является наибольшим совместимым множеством, что невозможно, так как

$$|W_0 \setminus W'| < |W_0 \setminus W_M|.$$

3° Пусть $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ — самая длинная простая цепь, ребра которой попеременно принадлежат $W_0 \setminus W_M$ и $W_M \setminus W_0$, и пусть x_0 и x_k — крайние точки этой цепи; допустим сначала, что $x_0 \neq x_k$. Ввиду 1° оба крайних ребра u_1 и u_k принадлежат $W_M \setminus W_0$, откуда

$$d_{x_0}(W_0) < d_{x_0}(W_M) \leq f(x_0),$$

$$d_{x_k}(W_0) < d_{x_k}(W_M) \leq f(x_k).$$

Следовательно, в $\bar{G}(W_0)$ есть чередующаяся цепь $[\bar{a}, x_0] + \mu[x_0, x_k] + [x_k, \bar{a}]$, идущая из \bar{a} обратно в \bar{a} , вопреки предположению.

4°. В случае $x_0 = x_k$ из 2° ясно, что крайние ребра μ не могут принадлежать к разным категориям, значит оба они входят в $W_M \setminus W_0^1$; следовательно,

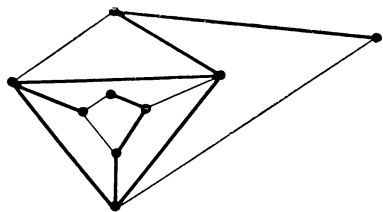
$$d_{x_0}(W_0) \leq d_x(W_M) - 2 \leq f(x_0) - 2.$$

Поэтому существует не менее двух сильных ребер, соединяющих \bar{a} с \underline{x}_0 , и, значит, имеется чередующаяся цепь, идущая из \bar{a} обратно в \bar{a} , вопреки предположению.

Ч. И Т. Д.

Алгоритм для нахождения наибольшего совместимого множества. Отнеся к числу сильных возможно больше ребер, строим некоторое совместимое множество W ; для построения наибольшего совместимого множества выясняем, имеется ли в $\bar{G}(W)$ чередующаяся цепь, идущая из \bar{a} в \bar{a} ; процесс состоит в следующем: отправившись из \bar{a} , идем по чередующейся цепи как можно дальше, отмечая стрелкой каждый шаг этого путешествия. Когда его невозможно более продолжать, возвращаемся (стирая стрелки) к ближайшему разветвлению и выходим в новом направлении...

Пример 1. В тюрьме города N , план которой помещен ниже, каждый часовой, обходя коридор $[x, y]$, должен все время иметь в поле зрения две камеры x и y , расположенные в концах коридора; какое наименьшее количество часовых необходимо для того, чтобы каждая камера находилась под наблюдением?



Р и с. 18—2.

Если, следуя Норману, назвать *покрытием* графа (X, U) такое множество ребер $V \subset U$, что каждая вершина $x \in X$ инцидентна хотя бы

одному ребру из V , то задача сведется к нахождению наименьшего покрытия. Множество V является покрытием тогда и только тогда, когда множество $W = U \setminus V$ удовлетворяет условию

$$d_x(W) \leq d_x(U) - 1 \quad (x \in X).$$

Определяя указанным выше способом наибольшее множество W , совместимое с этим неравенством, мы найдем наименьшее покрытие

¹⁾ В противном случае, как легко показать, мы вернулись бы к случаю $x_0 \neq x_k$. — Прим. перев.

$V = U \setminus W$; для графа, изображенного на рис. 18—2, наименьшее покрытие содержит 5 ребер, т. е. достаточно пяти часовых.

Пример 2 (Рот [7]). Задача о нахождении наименьшего покрытия возникает еще, когда для какой-нибудь релейной системы или контрольного устройства желательно составить наиболее простую эквивалентную схему. Более конкретно, рассмотрим электрическое реле, управляемое тремя кнопками A , B и C , причем положения реле описываются тремя переменными ε_A , ε_B , ε_C : полагаем $\varepsilon_A = 1$, когда кнопка A нажата, и $\varepsilon_A = 0$, когда она не нажата, и т. д. Каждому вектору $\varepsilon = (\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C)$ с координатами 0,1 (то есть каждой вершине единичного куба в трехмерном пространстве \mathbf{R}^3) поставим в соответствие число

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C),$$

равное 1, если реле пропускает ток, и равное 0 в противном случае. Ищется такая последовательно-параллельная схема с выключателями, управляемыми кнопками A , B и C , что

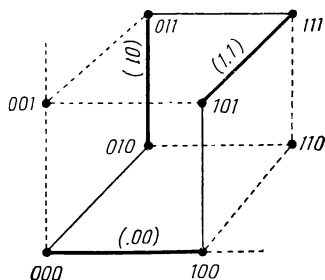


Рис. 18—3.

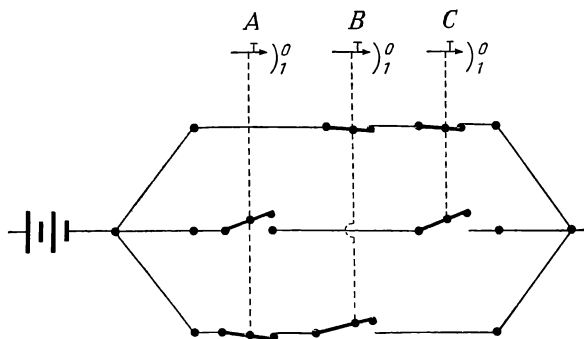


Рис. 18—4.

1° схема эквивалентна данному реле, т. е. она проводит ток, когда $\varphi(\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C) = 1$, и не проводит при $\varphi(\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C) = 0$;

2° каждая ветвь содержит два выключателя;

3° число ветвей настолько возможно мало¹⁾.

Задача сводится к изучению графа G , образованного вершинами ε , для которых $\varphi(\varepsilon) = 1$, причем две такие точки соединены, когда они

¹⁾ Эту задачу можно поставить в гораздо более общем виде в терминах булевой алгебры; она известна под именем „задачи Куайна“ (см. [7]).

являются соседними вершинами единичного куба; ищется наименьшее покрытие (рис. 18—3). Допустим, что ток проходит при $\varepsilon = 000, 010, 011, 111, 101, 100$; граф G обладает наименьшим покрытием из ребер $(.00), (1.1), (01.)$, откуда получается искомая схема (рис. 18—4).

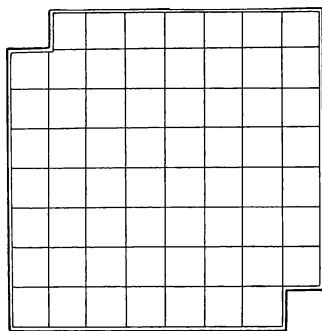
(Читатель может проверить, что в шести данных положениях ток проходит, а в остальных не проходит.)

Совершенное паросочетание

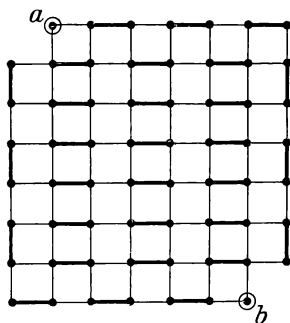
Пусть $G = (X, U)$ — граф, в котором, как прежде, ребра делятся на *сильные* и *слабые*, причем множество сильных ребер обозначается через W . Говорят, что W есть *паросочетание*, если никакие два сильных ребра не смежны.

Вершину x назовем *ненасыщенной*, если она не инцидентна никакому сильному ребру; в случае, когда ненасыщенных вершин нет, паросочетание называется *совершенным*. Первая задача, которую мы можем поставить, состоит в выяснении, для каких графов наибольшее паросочетание является совершенным.

ПРИМЕР 1. Задача об урезанной шахматной доске. Из шахматной доски 8×8 удалены две противоположные угловые клетки, как показано на рис. 18—5 (слева). Допустим, кроме того, что у нас



Урезанная шахматная доска



Максимальное паросочетание соответствующего графа

Р и с. 18—5.

есть 31 кость домино, каждая из которых может покрыть ровно две клетки шахматной доски. Задача состоит в следующем: можно ли покрыть 31 костью все 62 клетки урезанной шахматной доски?

Эта задача сводится к нахождению наибольшего паросочетания графа, вершинами которого служат клетки урезанной доски, причем соединены те пары вершин, которые отвечают соседним (по гори-

зонти или по вертикали) клеткам (рис. 18—5 справа); легко видеть, что это паросочетание не является совершенным, поэтому покрыть урезанную доску невозможно. То же можно доказать простым и изящным рассуждением, вовсе не пользуясь теорией паросочетаний: окрасим клетки попеременно в белый и черный цвета (как у обычной шахматной доски) и заметим, что обе удаленные клетки имеют одинаковый цвет; каждая кость домино необходимо покрывает одну белую и одну черную клетку, поэтому 31 кость вместе должна покрыть 31 белую и 31 черную клетки, что противоречит нашему замечанию.

Пример 2. Известную задачу, названную Люка́ (E. Lucas) „прогулкой молодых девушек“, можно сформулировать так: если известны взаимные симпатии воспитанниц женского коллежа, то как организовать прогулку парами, чтобы каждая пара состояла из симпатизирующих друг другу девушек? В каких случаях задача разрешима? Если $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ обозначает воспитанниц, а $[x_i, x_j] \in U$ тогда, когда девушки x_i и x_j испытывают взаимную симпатию, то задача сводится к выяснению вопроса о том, существует ли у графа (X, U) совершенное паросочетание.

Пусть G — данный граф, W — наибольшее паросочетание, образованное сильными ребрами; определим, как в предыдущих параграфах, граф $\bar{G}(W)$, добавляя к G точку \bar{a} и соединяя ее сильными ребрами со всеми ненасыщенными вершинами G .

Как прежде, если существует чередующаяся цепь, идущая из \bar{a} в данную вершину x , то на последнем ребре этой цепи рисуем стрелку, направленную к x . Вершину x , которая служит концом некоторого ориентированного сильного ребра, но не является концом никакого ориентированного слабого ребра, называем *сильной* и пишем $x \in E$; если x является концом ориентированного слабого ребра, но не является концом ориентированного сильного ребра, то называем x *слабой* и пишем $x \in F$; если x служит концом как ориентированного сильного ребра, так и ориентированного слабого ребра, то называем x *смешанной* и пишем $x \in M$; наконец, вершину x , не являющуюся концом никакого ориентированного ребра, называем *недостижимой* и пишем $x \in I$. Таким образом, всякая ненасыщенная точка будет сильной или смешанной. В $\bar{G}(W)$ точку \bar{a} следует рассматривать как слабую вершину: в самом деле, если W — наибольшее паросочетание, то из теоремы Бержа — Нормана — Рэйбина следует, что вершину \bar{a} нельзя считать смешанной.

Теорема 2. *Паросочетание графа G является наибольшим тогда и только тогда, когда не существует чередующейся цепи, соединяющей две различные ненасыщенные вершины.*

Это сразу следует из теоремы Бержа — Нормана — Рэйбина; указанное выше условие выражает, что в графе $\bar{G}(W)$ нет чередующихся цепей, идущих из \bar{a} обратно в \bar{a} .

Теорема 3. Пусть W — наибольшее паросочетание, M_1 — компонента подграфа, порожденного смешанными точками. 1° В графе $\bar{G}(W)$ имеется сильное ребро, заходящее в M_1 (и только заходящее); 2° все остальные ребра, инцидентные M_1 , — слабые и исходят из M_1 (и только исходят).

1° Так как \bar{a} — слабая вершина, то $\bar{a} \notin M_1$ и, в силу теоремы Петерсена — Галлаи, существует одно и только одно ребро, заходящее в M_1 , скажем $[c, x_0]$, где $c \notin M_1$, $x_0 \in M_1$.

Допустим, что $[c, x_0]$ — слабое ребро; так как x_0 — смешанная вершина, то существует чередующаяся цепь μ , идущая из \bar{a} в x_0 и оканчивающаяся сильным ребром; эта цепь μ necessarily содержит ребро $[c, x_0]$ (единственный вход в M_1), за которым следует некоторое сильное ребро, инцидентное x_0 , причем оканчивается μ другим сильным ребром, инцидентным x_0 . Но это невозможно, поскольку не существует более одного сильного ребра, инцидентного x_0 . Значит, ребро $[c, x_0]$ должно быть сильным.

2° Пусть $[u, b]$ — другое ребро, инцидентное M_1 и такое, что $u \in M_1$, $b \notin M_1$; в силу теоремы Петерсена — Галлаи, оно necessarily является ориентированным и исходит из M_1 . Далее, это исходящее ребро не может быть сильным, ибо иначе вершина u , будучи смешанной, достигалась бы по чередующейся цепи, оканчивающейся сильным ребром.

Следствие 1. Если W — наибольшее паросочетание, а M_1 — компонента подграфа, порожденного множеством M смешанных вершин, то $|M_1| \geq 3$ и $|M_1|$ нечетно.

В самом деле, пусть $[c, x_0]$ — сильное ребро, инцидентное M_1 , где $x_0 \in M_1$. Имеем $|M_1| \geq 3$: иначе вершина x_0 не была бы достижима по чередующейся цепи, оканчивающейся слабым ребром. Так как M_1 состоит из точки x_0 и таких пар, в которых обе точки соединены сильным ребром, то число $|M_1|$ нечетно.

Следствие 2. Если W — наибольшее паросочетание, то каждая вершина, которая смежна с некоторой смешанной точкой, но сама не является смешанной, necessarily есть слабая вершина.

Действительно, если $[c, x_0]$ — сильное ребро, инцидентное компоненте M_1 , причем $c \notin M_1$, $x_0 \in M_1$, то, очевидно, $c \notin I$, $c \notin E$, $c \notin M$, значит $c \in F$.

Точно так же если $[x, y]$ — слабое ребро, инцидентное M_1 , причем $x \notin M_1$, $y \in M_1$, то $x \notin I$, $x \notin E$, $x \notin M$ и, следовательно, $x \in F$.

Следствие 3. Если W — наибольшее паросочетание, то всякая вершина, смежная с сильной вершиной, является слабой.

Если $e \in E$ и если $[x, e]$ — сильное ребро, то $x \notin I$ (как граничная точка ориентированного ребра), $x \notin E$ (иначе вершина e была бы смешанной), $x \notin M$ (в силу следствия 2), поэтому $x \in F$.

Если же $[x, e]$ — слабое ребро, то $x \notin I$, $x \notin E$, $x \notin M$ (в силу следствия 2), значит $x \in F$.

Теорема 4. Пусть W — наибольшее паросочетание, а I_1 — компонента подграфа, порожденного недостижимыми точками. Тогда все ребра, инцидентные I_1 , — слабые и неориентированные; всякая точка $s \notin I_1$, смежная с некоторой точкой из I_1 , является слабой вершиной; $|I_1|$ четно и $|I_1| \geq 2$.

1° Если $[c, x]$ — ребро, инцидентное I_1 , причем $x \in I_1$, то $c \notin M$, $c \notin I$, $c \notin E$ (ввиду следствия 3), поэтому $c \in F$ и ребро $[c, x]$ — слабое.

2° I_1 не содержит ни \bar{a} , ни ненасыщенных точек, значит это множество образовано парами, в которых обе вершины соединены сильным ребром; поэтому число $|I_1|$ четно и не меньше 2.

Теорема 5 (Татт [8] в общем виде, Берж [2]). Пусть даны связный граф $G = (X, U)$ и некоторое множество S его вершин; обозначим через $p_i(S)$ число компонент нечетного порядка у подграфа, порожденного множеством $X \setminus S$; тогда количество ненасыщенных вершин при наибольшем паросочетании графа G равно

$$\xi = \max_{S \subset X} [p_i(S) - |S|].$$

1° Рассмотрим множество $S \subset X$, и пусть C_1, C_2, \dots, C_p — компоненты нечетного порядка у подграфа, порожденного множеством $X \setminus S$. Если компонента C_k не содержит ненасыщенных вершин, то (так как $|C_k|$ нечетно) существует сильное ребро, один конец которого находится в C_k , а другой — в некоторой точке $s_k \in S$; двум различным компонентам C_k соответствуют две разные вершины s_k ; поэтому, обозначая через n_0 число ненасыщенных вершин, будем иметь $p_i(S) - n_0 \leq$ (числу компонент C_k , не содержащих ненасыщенных точек) $\leq |S|$. Отсюда

$$p_i(S) - |S| \leq n_0 \quad (S \subset X).$$

2° Покажем, что для надлежащим образом выбранного множества S имеет место равенство $p_i(S) - |S| = n_0$. Тем самым теорема будет доказана,

Пусть W — наибольшее паросочетание, F — множество слабых вершин графа G . В силу теоремы 3 и следствий 1, 2, 3

$$p_i(F) = (\text{числу компонент } M_j) + |E|.$$

Далее, сильные ребра графа G устанавливают взаимно-однозначное соответствие между множеством F , с одной стороны, и множеством компонент M_j , не содержащих ненасыщенных точек, и множеством насыщенных сильных точек — с другой; поэтому

$$|F| = (\text{числу компонент } M_j) + |E| - n_0.$$

Отсюда

$$n_0 = p_i(F) - |F|.$$

Следствие 1. Число ребер наибольшего паросочетания в точности равно

$$\frac{1}{2}(n - \xi),$$

где

$$\xi = \max_{S \subset X} [p_i(S) - |S|].$$

(Непосредственно).

Следствие 2 (теорема Татта). Для того чтобы граф допускал совершенное паросочетание, необходимо и достаточно, чтобы

$$p_i(S) \leq |S| \quad (S \subset X)$$

(Непосредственно.)

Пусть h — целое неотрицательное число; граф называется *однородным графом степени h* , если каждая его вершина имеет степень h ; в случае когда G — однородный граф, получаем гораздо более простые предложения.

Теорема 6. Если связный однородный граф степени h не содержит такого множества $S \subset \subset X$, что $|U_S| < h - 1$, то существует совершенное паросочетание¹⁾.

Действительно, пусть S — подмножество X (в строгом смысле), и пусть компонента C_1 подграфа, порожденного множеством $X \setminus S$, обладает нечетным числом элементов. Согласно предположению, $|U_{C_1}| \geq h - 1$; но не может быть $|U_{C_1}| = h - 1$, так как в противном случае число ребер в C_1 было бы

$$\frac{1}{2}[h|C_1| - (h - 1)] = \frac{1}{2}[h(|C_1| - 1) + 1],$$

¹⁾ Через U_S обозначается множество ребер, инцидентных S , у каждого из которых одна граничная точка не принадлежит S . — Прим. ред.

т. е., поскольку $|C_1|$ нечетно, оно не было бы целым числом. Следовательно, $|U_{C_1}| \geq h$, откуда

$$h|S| \geq |U_S| \geq \sum_k |U_{C_k}| \geq h p_i(S).$$

Таким образом, $p_i(S) \leq |S|$ для всех $S \subset X$; это неравенство имеет место и при $S = X$, следовательно, в силу теоремы Татта, граф допускает совершенное паросочетание.

Лемма [Эррера (A. Errera)]. Если однородный граф нечетной степени $h = 2k + 1$ не содержит множеств $S \subset X$, для которых $|U_S| < 2k$, и если W — наибольшее паросочетание, образованное сильными ребрами, то каждое ребро u_0 принадлежит некоторому простому циклу, состоящему попеременно из сильных и слабых ребер.

Вследствие теоремы 6 паросочетание W — совершенное; достаточно показать, что каждое слабое ребро принадлежит чередующемуся циклу (так как тогда сильное ребро будет принадлежать тому циклу; на котором лежит смежное с ним слабое ребро).

Допустим, что слабое ребро u_0 не принадлежит никакому чередующемуся циклу; если стянуть u_0 в точку \bar{a} , то в полученном графе \bar{G} не будет чередующихся цепей, идущих из \bar{a} обратно в \bar{a} , и вершина \bar{a} будет поэтому слабой.

Далее, в силу теоремы 3, для компоненты M_j подграфа, порожденного смешанными точками, имеются одно заходящее в нее сильное ребро и исходящие из нее слабые ребра, причем число последних четно (ибо после удаления сильных ребер каждая компонента связности нового графа будет обладать эйлеровым циклом); так как, согласно предположению, $|U_{M_1}| \geq 2k$, то можно также утверждать, что имеется по крайней мере $2k$ слабых ребер, исходящих из M_1 .

Если каждую компоненту M_j стянуть в сильную вершину, то полученный граф уже не будет содержать ребер, ориентированных в двух направлениях; количество слабых ребер, исходящих из сильной вершины, будет $\geq 2k$, а количество слабых ребер, заходящих в слабую вершину, будет $\leq 2k$. Подсчитывая теперь число сильных ориентированных ребер полученного графа \bar{G} в зависимости от числа $|E|$ его сильных вершин, а затем от числа $|F|$ его слабых вершин, найдем

$$|F| + 1 = (\text{числу ориентированных сильных ребер}) = |E|.$$

Поступая точно так же с ориентированными слабыми ребрами, получим

$$2k(|F| - 1) \geq (\text{числу ориентированных слабых ребер}) \geq 2k|E|.$$

Итак,

$$|F| + 1 = |E|,$$

$$|F| - 1 \geq |E|.$$

Но эти два неравенства несовместимы, поэтому лемма доказана.

Теорема 7. *Если связный однородный граф нечетной степени $h = 2k + 1$ не обладает множеством $S \subset X$, для которого $|U_S| < 2k$, то существует совершенное паросочетание, содержащее произвольное наперед заданное ребро u_0 .*

Действительно, в силу теоремы 6, существует совершенное паросочетание W ; если ребро u_0 — сильное, то теорема доказана. Если u_0 — слабое, то рассмотрим чередующийся цикл μ , проходящий через u_0 ; наличие такого цикла обеспечивается предыдущей леммой.

Заменив сильные ребра цикла μ слабыми, а слабые сильными, получим новое совершенное паросочетание, содержащее u_0 .

Ч. И Т. Д.

Приложение к числу внутренней устойчивости

Теория паросочетания дает нам алгоритм для построения внутренне устойчивого множества S с наибольшим числом элементов¹⁾; для краткости вместо „внутренне устойчивое“ будем здесь говорить просто „устойчивое“.

Лемма 1. *Пусть G — граф, W — наибольшее паросочетание; если граф G не имеет других вершин, кроме сильных и слабых, то сильные вершины составляют его наибольшее устойчивое множество.*

Рассмотрим множество E сильных вершин (оно содержит ненасыщенные вершины) и множество F слабых вершин. Множество $S \subset X$ служит опорой графа G , если каждое ребро имеет по крайней мере одну граничную точку в S ; дополнение опоры есть устойчивое множество, и наоборот. Если W — некоторое паросочетание, S — некоторая опора, то всегда

$$|W| \leq |C|.$$

Поэтому, если данное паросочетание W и данная опора S удовлетворяют условию $|W| = |C|$, то паросочетание — наибольшее, а опора — наименьшая. Так как в G две сильные вершины не могут быть смежны (следствие 3), то множество F служит опорой. Раз W — наибольшее паросочетание, то всякая точка из F является граничной для некоторого сильного ребра, идущего в E ; значит $|F| = |W|$ и F — наименьшая опора.

Следовательно, дополнение $E = X \setminus F$ представляет собой наибольшее устойчивое множество.

Лемма 2. *Пусть W — наибольшее паросочетание графа G , при котором нет других вершин, кроме сильных и слабых; в графе G' , полученном из G удалением сильной вершины e вместе*

¹⁾ Для нахождения числа внутренней устойчивости и других связанных с ним характеристик графа существует еще рекуррентный способ (см. [9]). — *Прим. перев.*

с инцидентными ей ребрами, множество $E \setminus \{e\}$ является наибольшим устойчивым множеством.

В самом деле, F служит опорой подграфа G' , полученного удалением сильной вершины e ; покажем, что это — наименьшая опора (тем самым будет доказано, что $E \setminus \{e\} = X' \setminus F$ является наибольшим устойчивым множеством графа G').

Допустим сперва, что точка e — насыщенная, и пусть $[e, f]$ — сильное ребро, инцидентное e ; тогда $W \setminus [e, f]$ представляет собой паросочетание G' , но уже не наибольшее, ввиду теоремы 2, так как имеется чередующаяся цепь, идущая из начала \bar{a} в ненасыщенную точку f . Поэтому наибольшее паросочетание W' графа G' удовлетворяет условию $|W'| = |W|$.

(Если точка e — ненасыщенная, то W — наибольшее паросочетание и снова $|W'| = |W|$).

Так как для паросочетания W' и опоры F имеет место равенство $|W'| = |F|$, то F — наименьшая опора графа G' .

Ч.И.Т.Д.

Лемма 3. Пусть граф G' получен из G добавлением новых ребер; тогда числа внутренней устойчивости этих графов удовлетворяют условию $\alpha(G') \leq \alpha(G)$.

В самом деле, пусть \mathcal{S} — семейство устойчивых множеств графа G , а \mathcal{S}' — аналогичное семейство для G' . Так как $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$, то

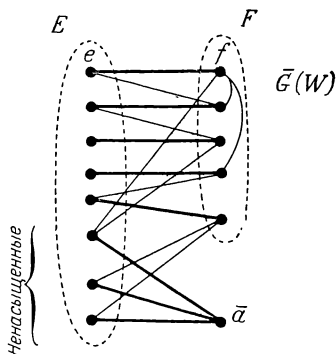
$$\alpha(G') = \max_{S \in \mathcal{S}'} |S| \leq \max_{S \in \mathcal{S}} |S| = \alpha(G).$$

Теорема 8 (Берж [1]). Пусть $S(A)$ обозначает наибольшее устойчивое множество подграфа, порожденного множеством $A \subset X$; для наибольшего паросочетания W обозначим через M_1, M_2, \dots компоненты подграфа, порожденного смешанными вершинами, а через I_1, I_2, \dots — компоненты подграфа, порожденного недостижимыми вершинами, и положим

$$S = E \cup S(M_1) \cup S(M_2) \cup \dots \cup S(I_1) \cup S(I_2) \cup \dots$$

Если имеется не более одной компоненты подграфа, порожденного смешанными вершинами, то S — наибольшее устойчивое множество графа $G = (X, U)$.

В самом деле, каждая вершина, смежная с сильной вершиной, является слабой (следствие 3), как и любая вершина, смежная с возможной компонентой M_1 (следствие 2), и как всякая вершина, смежная с компонентой I_k (теорема 4); поэтому S — устойчивое множество,



Р и с. 18—6.

Далее, если удалить все ребра, соединяющие слабую вершину со смешанной или с недостижимой, то граф G распадается на компоненты $E \cup F$, M_1 , I_1 , I_2 , \dots .

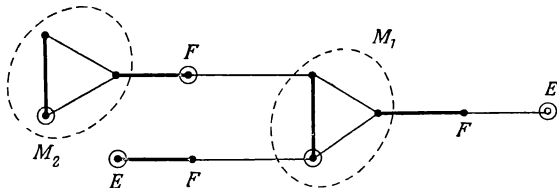


Рис. 18—7.

E представляет собой наибольшее устойчивое множество компоненты $E \cup F$, потому что если из G удалить все I_k и стянуть компоненту M_1 в одну точку e_1 , то новый граф не будет иметь других точек, кроме слабых и сильных, и можно применить лемму 2. Таким образом, S является наибольшим устойчивым множеством не связного графа. Восстанавливая теперь ребра, удаленные при преобразовании графа G , мы не увеличим числа внутренней устойчивости (лемма 3); но так как S остается устойчивым и в G , то оно — наибольшее устойчивое множество.

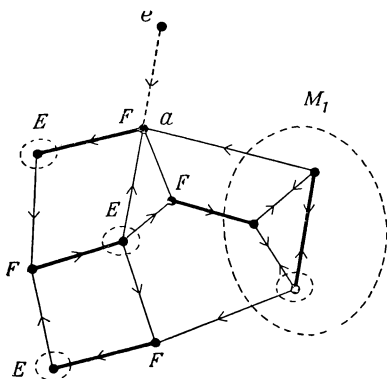


Рис. 18—8.

Замечание 1. Это утверждение сохраняет силу и при наличии нескольких компонент подграфа, порожденного смешанными точками, если только никакая компонента M_j не достижима по такой чередующейся цепи, которая предварительно уже пересекла некоторую компоненту M_k . В случае когда существует чередующаяся цепь μ , покидающая M_k до вступления в M_j ,

надо посмотреть, может ли увеличиться устойчивое множество S от замены сильных точек μ слабыми.

Например, в графе, изображенном на рис. 18—7, между компонентами M_1 и M_2 имеется слабая точка, и, очевидно, можно путем добавления ее к S образовать большее устойчивое множество (вершины которого на рис. 18—7 обведены кружками).

Замечание 2. Для определения наибольшего устойчивого множества в компоненте M_j или I_k можно также с пользой применить теорему 8 и предшествующие леммы. Достаточно добавить ненасыщенную точку, целесообразно соединив ее, или разбить подходящим образом выбранное слабое ребро, как видно из следующего примера.

Пример. Рассмотрим граф G , изображенный на рис. 18 — 8, с наибольшим паросочетанием W . Замечаем, что этот граф не имеет ненасыщенных точек, поэтому все его вершины недостижимы. Тем не менее добавим точку e и ребро $[e, a]$ и положим $Y = X \cup \{e\}$.

Подграф, порожденный множеством $Y \setminus M_1$, не имеет других точек, кроме сильных и слабых, значит вершина e вместе с тремя вершинами „ E “ образует наибольшее устойчивое множество. В силу леммы 2 подграф, порожденный множеством $X \setminus M_1$, имеет в качестве наибольшего устойчивого множества три вершины „ E “; поэтому граф, состоящий из двух не связанных между собой компонент $X \setminus M_1$ и M_1 , имеет четыре обведенные вершины в качестве наибольшего устойчивого множества. В силу леммы 3 эти же вершины образуют наибольшее устойчивое множество графа G .

Фактороиды

Гамильтоновы циклы и фактороиды

В конечном графе G *гамильтонова цепь* — это цепь, проходящая через каждую его вершину один и только один раз; *гамильтонов цикл* — это цикл, проходящий через каждую вершину (за исключением начальной вершины, которая совпадает с конечной), один и только один раз.

Заметим, что если каждое ребро графа ориентировать в двух направлениях, превратив тем самым G в симметрический граф, то каждая гамильтонова цепь будет определять гамильтонов путь, и наоборот, а каждый гамильтонов цикл определит гамильтонов контур, и наоборот.

Задача нахождения гамильтоновой цепи или гамильтонова цикла была изучена ранее (гл. 11), и мы можем к ней не возвращаться. Напротив, мы сталкиваемся с новой задачей, когда ищем в графе $G = (X, U)$ некоторый *фактороид*, т. е. частичный граф (X, V) , все вершины которого имеют степень 2 (и который, следовательно, состоит из одного или нескольких непересекающихся циклов).

Симметрический граф, имеющий факторы, может в то же время не обладать фактороидами; чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть граф, изображенный на рис. 19—1: дуги, проведенные жирными линиями, образуют фактор, а фактороидов у графа нет.

Поиски фактороида ведутся, как указано в гл. 18, посредством рассмотрения чередующихся цепей из сильных и слабых ребер между двумя ненасыщенными вершинами; мы ограничимся установлением простых критериев для непосредственного выяснения существуют ли фактороиды. Займемся также определением наибольшего числа фактороидов без общих ребер, которые можно выявить в заданном графе. Сначала ограничимся однородными графами степени h .

Пример 1 [Киркман (Kirkman)]. Одиннадцать министров ежедневно садятся за круглый стол; как их рассаживать, если желательно, чтобы каждый из них имел на каждом совещании новых соседей? Сколько дней может это продолжаться?

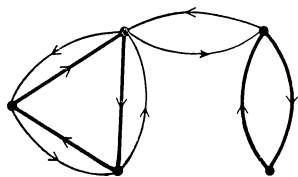


Рис. 19—1.

Задача сводится к отысканию наибольшего числа гамильтоновых циклов без общих ребер в полном графе с одиннадцатью вершинами a, b, c, \dots, i, j, k . В данном случае, как легко видеть, существует только пять циклов без общих ребер, например

$$a b c d e f g h i j k a,$$

$$a c e b g d i f k h j a,$$

$$a e g c i b k d j f h a,$$

$$a g i e k c j b h d f a,$$

$$a i k g j e h c f b d a.$$

Эти циклы получаются вращением линии, проведенной на рис. 19—2, в направлении стрелок. В более общем случае $2n + 1$ вершин можно найти n гамильтоновых циклов без общих ребер.

Пример 2 [Люка́ (E. Lucas)]. Шесть юношей a, b, c, d, e, f и шесть девушек $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}$ водят хоровод, взявшись за руки. Сколькими способами могут они стать в круг, если каждый юноша хочет танцевать рядом с каждой из

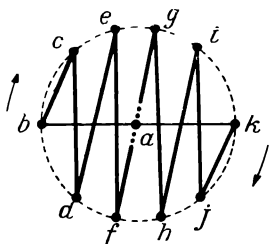


Рис. 19—2.

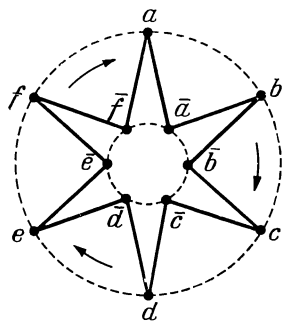


Рис. 19—3.

девушек только один раз и не хочет ни разу оказаться рядом с другим юношей?

Задача сводится к нахождению наибольшего числа гамильтоновых циклов без общих ребер у некоторого бихроматического графа с двенадцатью вершинами. Имеется три цикла без общих ребер:

$$a \bar{a} b \bar{b} c \bar{c} d \bar{d} e \bar{e} f \bar{f} a,$$

$$a \bar{c} b \bar{d} c \bar{e} d \bar{f} e \bar{a} f \bar{b} a,$$

$$a \bar{e} b \bar{f} c \bar{a} d \bar{b} e \bar{c} f \bar{d} a.$$

Эти циклы получаются вращением линии, проведенной на рис. 19—3, вместе с буквами внешней окружности; теория покажет нам, что ни гамильтоновых циклов без общих ребер, ни фактороидов без общих ребер больше найти нельзя.

ПРИМЕР 3 (Гильберт). Рассмотрим натуральные числа p_{ij} , где $i < n$, $j \leq n$, $i < j$, и образуем функцию n комплексных переменных:

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{i < j \leq n} (z_i - z_j)^{p_{ij}}.$$

В теории инвариантов Гильберту понадобилось разложить f в произведение *примитивных сомножителей*, каждый из которых можно представить в виде

$$(z_1 - z_{i_1})(z_2 - z_{i_2}) \dots (z_n - z_{i_n}),$$

где (i_1, i_2, \dots, i_n) — некоторая перестановка чисел $(1, 2, \dots, n)$. Чтобы выяснить, возможно ли такое разложение, образуем мультиграф G с n вершинами x_1, x_2, \dots, x_n , соединяя вершины x_i и x_j (где $i < j$) ребрами в количестве p_{ij} штук; задача сводится теперь к разложению G на фактороиды без общих ребер.

Теорема 1 [Петерсен (J. Petersen)]. *Однородный граф четной степени $h = 2k$ всегда можно разложить на k фактороидов без общих ребер.*

Действительно, мы можем считать граф связным (в противном случае нужно было бы рассмотреть каждую компоненту отдельно); в силу теоремы 1 (гл. 17), граф обладает эйлеровым циклом. Ориентируя каждое ребро в направлении обхода, мы получим псевдосимметрический граф G' , у которого полустепени исхода и захода каждой вершины равны k . В силу следствия из теоремы 2 (гл. 11), G' можно разложить на k факторов, которые и будут фактороидами первоначального графа.

Теорема 2 [Бэблер (Baebler)]. *Однородный граф нечетной степени $n = 2k + 1$ содержит k фактороидов без общих ребер, если*

$$\min_{\substack{S \neq X \\ S \neq \emptyset}} |U_S| \geq 2k.$$

Это условие достаточно, но не необходимо¹⁾.

В самом деле, в этом случае граф допускает полное паросочетание (теорема 6, гл. 18). Ребра, не участвующие в паросочетании, образуют однородный частичный граф степени $2k$, который, в силу теоремы 1, может быть разложен на k фактороидов без общих ребер.

Ч. И Т. Д.

¹⁾ Обобщая этот результат, Бэблер доказал [1]: *однородный граф нечетной степени $n = 2k + 1$ содержит q фактороидов без общих ребер (где $q \leq k$), если*

$$\min_{\substack{S \neq X \\ S \neq \emptyset}} |U_S| \geq 2q.$$

Пример. Сколькими способами $2k + 2$ детей могут составить один или несколько хороводов так, чтобы никакие дети не были соседями более одного раза? Эта задача сводится к отысканию количества фактороидов без общих ребер у полного однородного графа степени $2k + 1$. Так как в данном случае $|U_S| \geq 2k$, то имеется k возможных способов.

Нас в особенности будут интересовать фактороиды однородных графов степени 3 (ввиду той исключительной роли, которую они играют в „задаче о четырех красках“). Прежде всего заметим, что однородный граф G степени 3 без петель является 4-хроматическим, потому что, будучи симметрическим графом, G допускает функцию Гранди $g(x)$, причем

$$\max g(x) \leq \max |\Gamma x| = 3.$$

Теорема 4 (гл. 4) показывает тогда, что его хроматическое число $\gamma(G) \leq 3 + 1 = 4$.

А что можно сказать о его хроматическом классе? Ответ существенно зависит от наличия фактороида. Всякий раз, когда G имеет фактороид V , он допускает также совершенное паросочетание $W = U \setminus V$ (и наоборот); будем считать ребра V *слабыми*, а ребра W — *сильными*. Назовем *перешейком* связного графа всякое такое ребро, удаление которого приводит к появлению двух компонент (каждая из которых содержит хотя бы одно ребро). Имеет место

Теорема 3. *Рассмотрим однородный граф G степени 3 без перешейков; 1° его ребра можно распределить по фактороиду V и совершенному паросочетанию W ; 2° через каждое ребро u_0 проходит некоторый чередующийся цикл четной длины (ребра которого принадлежат попеременно V и W).*

Первое утверждение сразу следует из теоремы 2, второе — из леммы Эррера (гл. 18).

Прямое доказательство утверждения 2° (для памяти).

Рассмотрим сначала слабое ребро $u_0 = [x_0, y_0] \in V$ и построим, отправляясь от G , новый граф \bar{G} , поместив в середину ребра $[x_0, y_0]$ новую вершину a_0 и соединив ее сильным ребром с началом \bar{a} . Если ориентировать ребра в направлении чередующихся цепей, исходящих из \bar{a} , то около точки a_0 граф \bar{G} будет иметь вид, показанный на рис. 19 — 4 (так как, по предположению, u_0 не входит ни в какой четный чередующийся цикл). Каждая вершина графа G принадлежит к одному из 7 типов, изображенных на рис. 19 — 4; обозначим через n_k число вершин типа k . В силу теоремы 3 (гл. 18) n_7 равно числу компонент M_j смешанных точек; ввиду отсутствия перешейков каждая компонента M_j имеет хотя бы один выход. Число слабых ребер, инцидентных M_j , четно (потому что, войдя по какому-нибудь из этих слабых ребер и не проходя других ребер, кроме еще не

пройденных слабых, мы наверняка „выскочим“ из M_j). Поэтому число n_7 компонент M_j удовлетворяет условию

$$(1) \quad 2n_7 \leq n_5.$$

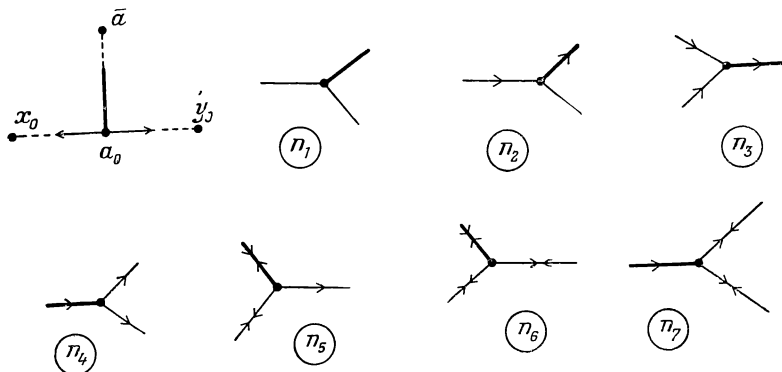
Сосчитаем число слабых ребер \bar{G} , ориентированных только в одном направлении:

$$(2) \quad n_2 + 2n_3 = 2n_4 + n_5 + 2.$$

Сосчитаем число сильных ребер \bar{G} , ориентированных только в одном направлении:

$$(3) \quad 1 + n_2 + n_3 = 1 + n_4 + n_7.$$

Если к (1) прибавить (2), умноженное на -1 , и (3), умноженное на 2, то получим $n_2 \leq -2$, что невозможно.



Р и с. 19—4.

2° Сильное ребро u_1 necessarily принадлежит некоторому чередующемуся циклу, ибо ввиду 1° через ребро, смежное с u_1 , проходит чередующийся цикл (содержащий ребро u_1).

Следствие. Если G — однородный граф степени 3 и без перешейков, то: 1° существует совершенное парасочетание, содержащее произвольно выбранное ребро; 2° существует фактороид, содержащий два произвольно выбранных ребра.

1° Если u_0 — слабое ребро при некотором парасочетании W , то рассмотрим чередующийся цикл μ , проходящий через u_0 ; тогда $W' = (W \setminus \mu) \cup (\mu \setminus W)$ представляет собой совершенное парасочетание, содержащее ребро u_0 .

2° Рассмотрим два произвольно заданных ребра u_1 и u_2 и превратим граф G в G' , добавляя вершину a_1 в середине u_1 , вершину a_2 в середине u_2 и соединяя a_1 с a_2 ребром u_0 . Тогда G' — однородный граф степени 3, без перешейков, поэтому он обладает совер-

шенным паросочетанием, содержащим u_0 . Слабые ребра образуют тогда фактороид, содержащий u_1 и u_2 .

Теорема 4 (Петерсен — Эррера). *Если в однородном графе G степени 3 все перешейки расположены на одной и той же элементарной цепи, то существует фактороид.*

Действительно, при удалении всех перешейков граф G распадается на непересекающиеся компоненты C , D и т. д.; каждое из множеств U_C , U_D , ... состоит из одного или двух перешейков G .

Допустим, что U_C состоит из двух перешейков v и w , и рассмотрим подграф, порожденный множеством C ; оба ребра этого подграфа, смежные с v , соединим в одно, удалив при этом их общую вершину; то же сделаем с двумя ребрами, смежными с w . Новый граф будет однородным степени 3, и в силу предыдущего следствия можно построить его фактороид, содержащий составные ребра¹⁾. Таким способом мы образуем фактороиды всех компонент C , D , ... и получим фактороид графа G .

Теорема 5. *Однородный граф степени 3 относится к хроматическому классу ≤ 5 ; этот класс ≤ 4 , если не существует перешейков или если все перешейки принадлежат одной и той же элементарной цепи; он ≤ 3 , если существует гамильтонов цикл.*

В самом деле, рассмотрим однородный граф G степени 3 и наибольшее паросочетание, ребра которого окрасим в первый цвет. Если имеются ненасыщенные точки, то для каждой такой точки выберем некоторое инцидентное ей ребро и окрасим выбранные ребра во второй цвет. После этого останутся неокрашенными только ребра непересекающихся элементарных путей и циклов, для окраски которых, очевидно, достаточно трех цветов.

Если все перешейки лежат на одной элементарной цепи, то, в силу предыдущего результата, не существует ненасыщенных точек, поэтому достаточно 4 цветов.

Если имеется гамильтонов цикл, то он обладает четной длиной (потому что число ребер равно $3n/2$, и поэтому число вершин n необходимо четно); таким образом, двух цветов достаточно для окраски ребер гамильтонова цикла, а трех — для окраски всех ребер графа.

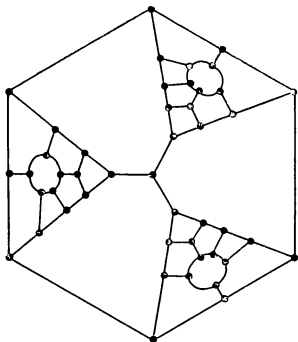
¹⁾ При соединении двух ребер в одно граф переходит, вообще говоря, в мультиграф (см. рисунок). Однако все утверждения, на которые опирается доказательство теоремы 4, справедливы и для мультиграфов. — *Прим. перев.*



Следует отметить, что произвольный однородный граф степени 3, даже если он не содержит перешейков, не всегда обладает гамильтоновым циклом: см., например, граф, изображенный на рис. 19 — 5 (который относится к хроматическому классу 3).

Следствие. [Смит (С.А.В. Smith)]. *В однородном графе степени 3 число гамильтоновых циклов, начинающихся произвольно выбранным ребром, четно.*

Если гамильтоновых циклов нет, то теорема доказана; если гамильтоновы циклы есть, то граф относится к хроматическому классу 3 и не имеет перешейков.



Р и с. 19—5.

Будем рассматривать, с одной стороны, множество всевозможных раскрасок π (т. е. разбиений множества ребер U на три множества несмежных ребер) и, с другой стороны, множество фактороидов μ , не имеющих циклов нечетной длины. Всякой раскраске π соответствуют три фактороида $\mu_1(\pi)$, $\mu_2(\pi)$ и $\mu_3(\pi)$, окрашенных каждый двумя цветами, причем

$$(1) \mu_1(\pi) + \mu_2(\pi) + \mu_3(\pi) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Наоборот, всякому фактороиду μ , имеющему k_μ элементарных циклов четной длины без общих ребер, можно отнести

ровно $2^{k_\mu-1}$ различных раскрасок π . Суммируя сравнения (1) по всем раскраскам π , получим

$$\sum_{\mu} 2^{k_\mu-1} \mu \equiv 0 \pmod{2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{\mu/k_\mu=1} \mu \equiv 0 \pmod{2},$$

откуда и вытекает доказываемый результат.

Необходимое и достаточное условие существования фактороида

В предыдущем параграфе мы установили простые достаточные условия существования фактороида; теперь будем искать более сильные условия.

Пусть G — граф, в котором требуется найти фактороид, а \bar{G} — граф, полученный из G следующим образом: каждую вершину x из G , для которой, например, $U_x = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, заменяем двумя

множествами соответственно из k и $k-2$ элементов:

$$\bar{X}(x) = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k\},$$

$$\bar{Y}(x) = \{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{k-2}\};$$

каждую вершину \bar{x}_i соединяем ребром с каждой вершиной \bar{y}_j , а каждому ребру $u_j = [x, x']$ ставим в соответствие ребро \bar{u}_j , соединяющее $\bar{x}_j \in \bar{X}(x)$ с некоторой вершиной $\bar{x}' \in \bar{X}(x')$ (см. рис. 19—6).

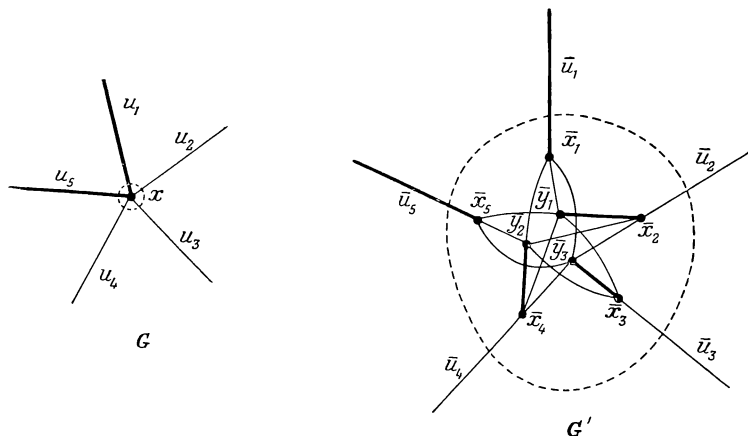


Рис. 19—6.

Исключим случай, когда G имеет вершину степени 1, так как в этом случае, очевидно, фактороидов не существует; исключим также случай, когда G имеет вершины степени 2, так как все такие вершины можно удалить (соединяя при этом соответственные пары смежных ребер в одно ребро). Иначе говоря, мы будем считать, что для любой вершины $x \in X$

$$|\bar{Y}(x)| \neq \emptyset.$$

Тогда каждое совершенное паросочетание графа \bar{G} определяет некоторый фактороид в G и, наоборот, каждый фактороид графа G определяет некоторое совершенное паросочетание в \bar{G} . Мы приходим к известной задаче: охарактеризовать графы \bar{G} , допускающие совершенное паросочетание.

Лемма. Обозначим через \bar{X} множество вершин графа \bar{G} и через $p_i(\bar{S})$ число компонент нечетного порядка у подграфа,

порожденного множеством $\bar{X} \setminus \bar{S}$; тогда существует множество \bar{S} , удовлетворяющее условиям

$$(0) \quad p_i(\bar{S}) - |\bar{S}| = \max_{\bar{E} \subset \bar{X}} (p_i(\bar{E}) - |\bar{E}|),$$

$$(1) \quad \bar{X}(a) \cap \bar{S} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{X}(a) \subset \bar{S},$$

$$(2) \quad \bar{Y}(b) \cap \bar{S} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{Y}(b) \subset \bar{S},$$

$$(3) \quad \{a/\bar{X}(a) \subset \bar{S}\} \cap \{b/\bar{Y}(b) \subset \bar{S}\} = \emptyset.$$

Мы покажем, что среди множеств \bar{S} , удовлетворяющих условию (0), те, для которых число $|\bar{S}|$ — наименьшее, удовлетворяют также условиям (1), (2), (3).

Имеет место (1): допустим, что $\bar{X}(a) \not\subset \bar{S}$, $\bar{X}(a) \cap \bar{S} \neq \emptyset$ для некоторой вершины $a \in X$, и рассмотрим какую-нибудь вершину $\bar{x}_0 \in \bar{X}(a) \cap \bar{S}$; положим $\bar{S}_0 = \bar{S} \setminus \{\bar{x}_0\}$.

Если $\bar{Y}(a) \subset \bar{S}$, то

$$p_i(\bar{S}_0) \geq p_i(\bar{S}).$$

Если же $\bar{Y}(a) \not\subset \bar{S}$, то $p_i(\bar{S}_0) = p_i(\bar{S}) - 1$ или $p_i(\bar{S}_0) = p_i(\bar{S})$, в зависимости от того, соединяются или не соединяются в точке \bar{x}_0 две непересекающиеся компоненты подграфа, порожденного множеством $\bar{X} \setminus \bar{S}$. Окончательно ¹⁾:

$$p_i(\bar{S}_0) \geq p_i(\bar{S}) - 1,$$

$$|\bar{S}_0| = |\bar{S}| - 1,$$

откуда

$$p_i(\bar{S}_0) - |\bar{S}_0| \geq p_i(\bar{S}) - 1 - |\bar{S}| + 1 = \max_{\bar{E} \subset \bar{X}} (p_i(\bar{E}) - |\bar{E}|).$$

Но это противоречит тому, что $|\bar{S}_0| < |\bar{S}|$.

Имеет место (2): допустим, что $\bar{Y}(b) \cap \bar{S} \neq \emptyset$ и $\bar{Y}(b) \not\subset \bar{S}$ для некоторой вершины $b \in X$, и рассмотрим множество $\bar{T} = \bar{S} \setminus (\bar{Y}(b) \cap \bar{S})$; очевидно,

$$|\bar{T}| < |\bar{S}|.$$

Если $\bar{X}(b) \subset \bar{S}$, то

$$p_i(\bar{T}) \geq p_i(\bar{S}).$$

¹⁾ Поскольку $p_i(\bar{S})$ и $p_i(\bar{S}_0)$ — числа не компонент вообще, а компонент нечетного порядка соответствующих подграфов, то при $\bar{Y}(a) \subset \bar{S}$ возможен и случай $p_i(\bar{S}_0) = p_i(\bar{S}) - 1$, а при $\bar{Y}(a) \not\subset \bar{S}$ — и случай $p_i(\bar{S}_0) = p_i(\bar{S}) + 1$. Но так или иначе, всегда выполняется неравенство $p_i(\bar{S}_0) \geq p_i(\bar{S}) - 1$. — Прим. ред.

Если же $\bar{X}(b) \not\subset \bar{S}$, то ¹⁾

$$p_i(\bar{T}) = p_i(\bar{S}).$$

Поэтому во всех случаях $p_i(\bar{T}) \geq p_i(\bar{S})$ и

$$p_i(\bar{T}) - |\bar{T}| \geq p_i(\bar{S}) - |\bar{S}| + 1 > \max_{\bar{E} \subset \bar{X}} (p_i(\bar{E}) - |\bar{E}|),$$

Но это невозможно.

Имеет место (3): допустим, что $\bar{X}(a) \subset \bar{S}$, $\bar{Y}(a) \subset \bar{S}$ для некоторой вершины $a \in X$; пусть $y_0 \in \bar{Y}(a)$; положим $\bar{T} = \bar{S} \setminus \{y_0\}$. Тогда

$$p_i(\bar{T}) = p_i(\bar{S}) + 1,$$

$$|\bar{T}| = |\bar{S}| - 1.$$

Отсюда

$$p_i(\bar{T}) - |\bar{T}| = p_i(\bar{S}) - |\bar{S}| + 2 > \max_{\bar{E} \subset \bar{X}} (p_i(\bar{E}) - |\bar{E}|).$$

А это невозможно.

Теорема Татта. Пусть A и B — два непересекающихся множества вершин графа G ; $m(A, B)$ — число ребер, соединяющих A с B ; $q(A, B)$ — число тех компонент C подграфа, порожденного множеством $X \setminus A$, для которых $m(C, B)$ нечетно. Необходимое и достаточное условие существования факторида у G состоит в том, чтобы каждая вершина x имела степень $d(x) \geq 2$ и для любой пары непересекающихся множеств A и B выполнялось неравенство

$$q(A, B) - \sum_{b \in B} d(b) - 2|A| + 2|B| \geq 0.$$

В силу теоремы 5 (гл. 18) искомое условие равносильно тому, чтобы для определенного выше графа \bar{G} было

$$\max_{\bar{S} \subset \bar{X}} (p_i(\bar{S}) - |\bar{S}|) = 0.$$

В силу леммы можно ограничиться рассмотрением множеств \bar{S} , удовлетворяющих условиям (1), (2), (3). Рассмотрим некоторое множество \bar{S} такого типа и положим

$$A = \{a / \bar{X}(a) \subset \bar{S}\},$$

$$B = \{b / \bar{Y}(b) \subset \bar{S}\}.$$

¹⁾ И здесь при $\bar{X}(b) \not\subset \bar{S}$ возможен случай $p_i(\bar{T}) = p_i(\bar{S}) - 1$. Но этого достаточно, так как тогда $p_i(\bar{T}) - |\bar{T}| \geq \max_{\bar{E} \subset \bar{X}} (p_i(\bar{E}) - |\bar{E}|)$, что противоречит неравенству $|\bar{T}| < |\bar{S}|$. — Прим. ред.

Так как A и B не пересекаются, то

$$|\bar{S}| = \sum_{a \in A} d(a) + \sum_{b \in B} (d(b) - 2) = \sum_{a \in A} d(a) + \sum_{b \in B} d(b) - 2|B|.$$

Подсчитаем теперь $p_i(\bar{S})$; компоненты \bar{C} , пересекающиеся с $\bar{Y}(A)$, имеют вид $\bar{C} = \{\bar{y}\}$, где $\bar{y} \in \bar{Y}(a)$, $a \in A$, и число таких компонент равно

$$\sum_{a \in A} (d(a) - 2) = \sum_{a \in A} d(a) - 2|A|.$$

Если \bar{C} — компонента, не пересекающаяся с $\bar{Y}(A)$, то положим

$$C = \{x/\bar{X}(x) \cap \bar{C} \neq \emptyset\};$$

имеем $C \cap A = \emptyset$, а числа $m(C, B)$ и $|\bar{C}|$ обладают одинаковой четностью. Поэтому количество компонент \bar{C} нечетного порядка, не пересекающих $\bar{Y}(A)$, равно $q(A, B)$, откуда окончательно

$$p_i(\bar{S}) = q(A, B) + \sum_{a \in A} d(a) - 2|A|.$$

Искомое условие будет тогда

$$0 = \max_{\bar{S}} (p_i(\bar{S}) - |\bar{S}|) = \max_{A, B} \left[q(A, B) - 2|A| + 2|B| - \sum_{b \in B} d(b) \right].$$

Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Ясно, что совершенно аналогичным образом получается условие существования частичного графа с заданными степенями ¹⁾).

¹⁾ Это условие, которым мы обязаны Татту, к сожалению, слишком сложно для того, чтобы его применять. Пусть $f(x)$ — степень, которую надо получить для вершины x , а $d_A(x)$ — степень x в подграфе, порожденном множеством $X \setminus A$; условие Татта есть

$$\begin{aligned} (1) \quad & d(x) \geq f(x) \quad (x \in X), \\ (2) \quad & \sum_{x \in A} f(x) \geq q(A, B) + \sum_{x \in B} [f(x) - d_A(x)] \quad (A, B/A \cap B = \emptyset). \end{aligned}$$

Заметим, что таким же способом получается дефицит наибольшего множества W , совместимого с $f(x)$.

(См. также [6]. — *Прим. перев.*)

Связность графа

Точки сочленения

Говорят, что вершина x связного графа (X, U) является *точкой сочленения*, если подграф, получаемый удалением x , несвязен; если, кроме того, вершина x соединена с каждой из компонент этого подграфа только одним ребром, то x называют точкой *простого сочленения*.

Пример 1. В дереве каждая неконцевая точка является точкой простого сочленения. В противоположность этому граф, обладающий гамильтоновым циклом, не имеет точек сочленения.

Пример 2 (сеть коммуникаций). Пусть X — множество лиц, принадлежащих некоторой организации, и пусть $[x, y] \in U$, если лица x и y имеют возможность общаться. Точками сочленения служат связные; эти лица — особо уязвимое звено, так как их утрата нарушает единство и сплоченность организации.

Теорема 1. *Вершина x_0 связного графа тогда и только тогда является точкой сочленения, когда существуют две такие вершины a и b , что каждая цепь, соединяющая a с b , проходит через x_0 .*

1° Если подграф, порожденный множеством $X \setminus \{x_0\}$, несвязен, то он содержит по крайней мере две компоненты C и C' ; пусть a — некоторая вершина из C , а b — некоторая вершина из C' ; в первоначальном связном графе любая цепь, соединяющая a и b , необходимо должна пройти через x_0 .

2° Если любая цепь, соединяющая две вершины a и b , проходит через x_0 , то подграф, порожденный множеством $X \setminus \{x_0\}$, не может быть связным, и поэтому x_0 является точкой сочленения.

Понятие точки сочленения тесно связано с другими понятиями, аналогичными рассмотренным в гл. 12. В связном графе назовем *расстоянием между двумя вершинами x и y* длину $d(x, y)$ самой короткой цепи, идущей из x в y , а *удаленностью* вершины x — число

$$d(x) = \max_{y \in X} d(x, y).$$

Вершина наименьшей удаленности называется *центроидом*, а вершина наибольшей удаленности — *перифероидной* точкой. У симметрического графа эти понятия совпадают с понятиями центра и периферийной точки. Положим

$$\rho = \min_{x \in X} d(x) \quad (\text{ненаправленный радиус, или „радиоид“}).$$

Если $A \subset X$, то полагаем

$$d_A(x) = \max_{y \in A} d(x, y) \quad (\text{удаленность } x \text{ относительно } A).$$

Теорема 2 [Жордан (С. Jordan)]. *Если в связном графе G точка простого сочленения x_0 служит центроидом, то множество всех центроидов графа G сводится к единственной вершине или к двум смежным вершинам.*

1° В подграфе, порожденном множеством $X \setminus \{x_0\}$, имеется по крайней мере одна компонента A , для которой

$$d_A(x_0) = \rho.$$

Кроме того, существует такая компонента B , что

$$B \neq A; \quad d_B(x_0) = \rho \quad \text{или} \quad \rho - 1.$$

В самом деле, если бы для любой компоненты $B \neq A$ было $d_B(x_0) < \rho - 1$, то вершина a , смежная с x_0 и принадлежащая A , удовлетворяла бы условию

$$d(a) = \rho - 1 < \rho = \min_{x \in X} d(x);$$

но это невозможно.

2° Пусть x_1 — центроид $\neq x_0$ (если таковой существует), и пусть C_1 — та компонента подграфа, порожденного множеством $X \setminus \{x_0\}$, которая содержит x_1 . Не существует компоненты $C \neq C_1$, для которой $d_C(x_0) = \rho$: если бы такая компонента имелась, то, обозначая через c вершину из C с наибольшим расстоянием от x_0 , мы получили бы

$$d(x_1) \geq d(x_1, c) = d(x_1, x_0) + d(x_0, c) \geq 1 + \rho;$$

но это невозможно, так как x_1 — центроид.

3° Итак, доказано, что $C_1 = A$ и что компонента B , определенная в 1°, удовлетворяет условию $d_B(x_0) = \rho - 1$; но тогда x_1 есть не что иное, как вершина a , смежная с x_0 и принадлежащая A , так как в противном случае, обозначив через b вершину из B с наибольшим расстоянием от x_0 , мы получили бы

$$d(x_1) \geq d(x_1, b) = d(x_1, x_0) + d(x_0, b) \geq 2 + (\rho - 1) = \rho + 1;$$

а это невозможно, потому что x_1 — центроид.

Следствие. Дерево всегда имеет либо один-единственный центроид, либо ровно два центроида, притом смежных между собой.

В самом деле, каждый центроид дерева является в то же время точкой простого сочленения.

Теорема 3. *Перифероидная точка никогда не может быть точкой сочленения.*

Действительно, пусть z_0 — перифероидная точка; рассмотрим такую точку z , что

$$d(z_0, z) = \max_{x, y \in X} d(x, y).$$

Если бы z_0 была точкой сочленения, то подграф, порожденный множеством $X \setminus \{z_0\}$, имел бы несколько компонент; беря точку x в компоненте, не содержащей z , мы получили бы

$$d(x, z) = d(x, z_0) + d(z_0, z) > \max_{x, y} d(x, y),$$

что невозможно.

Графы без сочленений

Граф G называется *графом без сочленений*, если он связан и не имеет точек сочленения. Основные свойства таких графов выражаются тонкими теоремами, и читатель может при первом чтении опустить доказательства.

Теорема Менгера [4] (дополненная Дираком [1]). *В графе G без сочленений для каждой элементарной цепи $\mu = [a_0, a_1, \dots, a_k]$, соединяющей две различные вершины a_0 и a_k , существуют две такие элементарные цепи μ' и μ'' , что*

(1) *крайними вершинами обеих цепей μ' и μ'' являются a_0 и a_k ;*

(2) *μ' и μ'' не имеют общих вершин, кроме a_0 и a_k ;*

(3) *при движении по μ' (или μ'') от a_0 к a_k индексы встречающихся вершин цепи μ идут в возрастающем порядке.*

Теорема справедлива для цепи $\mu = [a_0, a_1]$ длины 1, потому что если a_0 не является точкой сочленения, то существует цепь μ' , идущая из a_0 в a_1 и не содержащая ребра $[a_0, a_1]$. Эта цепь, вместе с $\mu'' = [a_0, a_1]$, удовлетворяет поставленным условиям.

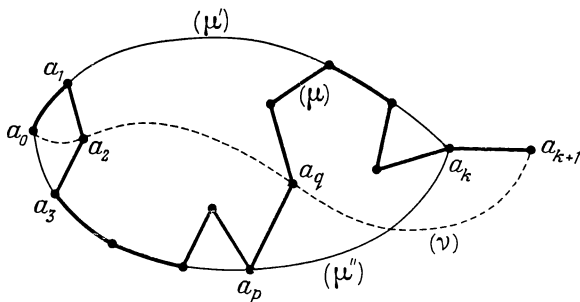
Предположим, что теорема верна для элементарных цепей длины k , и докажем, что она верна для произвольной элементарной цепи

$$\mu = [a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}]$$

длины $k + 1$.

Обозначим через μ' и μ'' две непересекающиеся цепи, соединяющие a_0 с a_{k+1} и удовлетворяющие условиям (1), (2), (3); требуется доказать, что между a_0 и a_{k+1} существуют две цепи μ'_0 и μ''_0 с аналогичными свойствами.

Существует элементарная цепь $\nu = \nu[a_0, a_{k+1}]$, соединяющая a_0 с a_{k+1} и не проходящая через a_k (в противном случае a_k в силу теоремы 1 была бы точкой сочленения). Обозначим через x последнюю вершину цепи ν , принадлежащую $\mu[a_0, a_k] \cup \mu'[a_0, a_k] \cup \mu''[a_0, a_k]$. Рассмотрим несколько случаев.



Р и с. 20—1.

Первый случай: $x = a_0$. Искомыми цепями являются

$$\begin{aligned}\mu'_0 &= \mu, \\ \mu''_0 &= \nu.\end{aligned}$$

Второй случай: $x = a_{k+1}$. Так как $x \notin \mu[a_0, a_k]$, то либо $x \in \mu'$, либо $x \in \mu''$; если, например, $x \in \mu'$, то полагаем

$$\begin{aligned}\mu'_0 &= \mu'[a_0, x], \\ \mu''_0 &= \mu''[a_0, a_k] + [a_k, a_{k+1}].\end{aligned}$$

Третий случай: $x \notin \mu$. В этом случае имеем или $x \in \mu'$, или $x \in \mu''$; если, например, $x \in \mu''$, то полагаем

$$\begin{aligned}\mu'_0 &= \mu'[a_0, a_k] + [a_k, a_{k+1}], \\ \mu''_0 &= \mu''[a_0, x] + \nu[x, a_{k+1}].\end{aligned}$$

Четвертый случай: $x \in \mu$, $x \neq a_0$, $x \neq a_{k+1}$. Можно написать $x = a_q$, где $q < k$; пусть a_p — вершина μ с $p \leq q$, ближайшая к a_q и принадлежащая также $\mu' \cup \mu''$; если, например, $a_p \in \mu''$ (см. рис. 20—1), то положим

$$\begin{aligned}\mu'_0 &= \mu'[a_0, a_k] + [a_k, a_{k+1}], \\ \mu''_0 &= \mu''[a_0, a_p] + \mu[a_p, a_q] + \nu[a_q, a_{k+1}].\end{aligned}$$

Поскольку эти четыре случая охватывают все возможности, теорема доказана.

Лемма. В связном графе без петель для любых двух ребер u и v существует элементарная цепь, которая начинается ребром u и оканчивается ребром v .

В самом деле, если $u = [a, x]$ и $v = [b, y]$, то ввиду связности графа вершины a и b можно соединить элементарной цепью $\mu = [a, a_1, a_2, \dots, a_k = b]$.

Если $x \notin \mu$, $y \notin \mu$, то искомая цепь будет

$$\mu_0 = [x, a] + \mu + [b, y].$$

Если $x \notin \mu$, $y \in \mu$, то искомая цепь будет

$$\mu_0 = [x, a] + \mu[a, y] + [y, b].$$

Если $x \in \mu$, $y \notin \mu$, то искомая цепь будет

$$\mu_0 = [a, x] + \mu[x, b] + [b, y].$$

Если $x \in \mu$, $y \in \mu$, то искомая цепь будет

$$\mu_0 = [a, x] + \mu[x, y] + [y, b].$$

Теорема 4. В графе без сочленений и без петель через любые два ребра u и v проходит некоторый элементарный цикл.

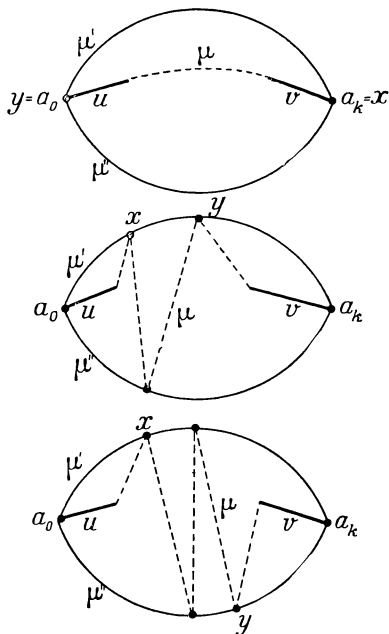
В самом деле, пусть $\mu = [a_0, a_1, \dots, a_k]$ — элементарная цепь, у которой $[a_0, a_1] = u$, $[a_{k-1}, a_k] = v$; такая цепь существует в силу леммы. Рассмотрим две непересекающиеся элементарные цепи μ' и μ'' , соединяющие a_0 с a_k , существование которых утверждается теоремой Менгера. Обозначим через x первую вершину цепи μ (после a_0), принадлежащую $\mu' \cup \mu''$, а через y — последнюю вершину цепи μ (перед a_k), принадлежащую $\mu' \cup \mu''$.

Первый случай: $x = a_k$, $y = a_0$. В этом случае (рис. 20 — 2,верху) искомым циклом является

$$\mu[a_0, a_k] + \mu'[a_k, a_0].$$

Второй случай: $x \neq a_k$, $y \neq a_0$, $x \in \mu'$, $y \in \mu'$. В этом случае (рис. 20 — 2, посредине) искомым циклом является

$$\mu[a_0, x] + \mu'[x, y] + \mu[y, a_k] + \mu''[a_k, a_0].$$



Р и с. 20—2.

Третий случай: $x \neq a_k$, $y \neq a_0$, $x \in \mu''$, $y \in \mu''$. Этот случай аналогичен предыдущему.

Четвертый случай: $x \neq a_k$, $y \neq a_0$, $x \in \mu'$, $y \in \mu''$. В этом случае (рис. 20 — 2, внизу) искомым циклом является

$$\mu[a_0, x] + \mu'[x, a_k] + \mu[a_k, y] + \mu''[y, a_0].$$

Пятый случай: $x \neq a_k$, $y \neq a_0$, $x \in \mu''$, $y \in \mu'$. Этот случай аналогичен предыдущему.

Рассмотренными пятью случаями исчерпываются все возможности, и теорема доказана.

Теорема 5. *Для графа G без петель и изолированных вершин следующие условия равносильны:*

(1) *через два произвольных ребра всегда проходит элементарный цикл;*

(2) *через две произвольных вершины всегда проходит элементарный цикл;*

(3) *граф не имеет сочленений.*

Покажем, что $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Rightarrow (2)$, потому что две произвольные вершины x и y служат граничными точками двух ребер (граф G не имеет изолированных вершин), а через эти два ребра проходит элементарный цикл, которому и принадлежат вершины x и y .

$(2) \Rightarrow (3)$, потому что, в силу (2), граф связан; если бы он имел точку сочленения, то две вершины x и y , разделяемые этой точкой, не могли бы принадлежать одному элементарному циклу, вопреки (2).

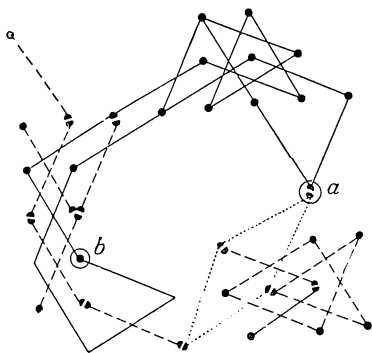
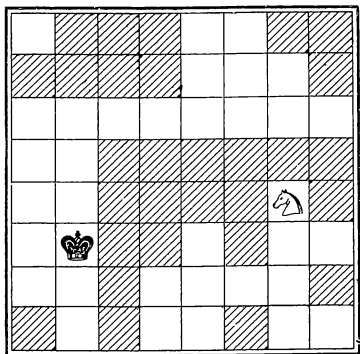
$(3) \Rightarrow (1)$ в силу предыдущей теоремы.

Рассмотрим теперь произвольный граф G ; если x — одна из его точек сочленения, а C — одна из компонент, отделяющихся после удаления x , то подграф G , порожденный множеством $C \cup \{x\}$, представляет собой, по определению, *кусок* графа G . Кусок прикреплен к остальной части графа точкой сочленения. Каждый кусок может содержать другие, меньшие куски; кусок, не содержащий меньших кусков, называется *минимальным куском*.

Это понятие позволяет установить простой критерий для выяснения того, проходит ли через две данные вершины какой-нибудь элементарный цикл. Именно, если a и b — две различные вершины элементарного цикла, то можно *ощипать* граф, последовательно отделяя от него куски, не содержащие одновременно a и b , и при этом всегда будет оставаться подграф более чем с одним ребром. Наоборот, если после ощипывания остается подграф более чем с одним ребром, то этот подграф не имеет сочленений и содержит обе вершины a и b ; следовательно, в силу теоремы 5 существует элементарный цикл, проходящий через a и b . Таким образом, *необходимое и достаточное условие существования элементар-*

ного цикла, проходящего через две данные вершины, состоит в том, чтобы после ошипывания получался подграф более чем с одним ребром.

Пример. Задача о „Конне Аттилы“. На шахматной доске находятся белый конь („конь Аттилы“) и черный король, как показано на рис. 20 — 3 (слева); заштрихованные клетки считаются „горящими“. Требуется дойти конем до клетки с королем и вернуться в исходную клетку, перемещаясь обычными ходами шахматного коня; при



Р и с. 20—3.

этом нельзя становиться ни на горящую клетку, ни на клетку, уже пройденную (потому что, как хорошо известно, конь Аттилы поджигает все на своем пути).

Эта задача сводится к определению в графе, изображенном на рис. 20 — 3 (справа), элементарного цикла, проходящего через две данные вершины a и b ; ошипывание удаляет некоторое количество кусков (обозначенных пунктиром), а остающийся граф (обозначенный сплошными линиями) имеет более одного ребра; поэтому задача разрешима.

h-связные графы

Рассмотрим связный граф $G = (X, U)$ порядка $n = |X|$; непустое множество $A \subset X$ называется *множеством сочленения*, если подграф, порожденный множеством $X \setminus A$, несвязен. В случае когда A сводится к единственной вершине, мы снова получаем *точку сочленения*.

Если граф несвязен, то пустое множество \emptyset рассматривается тоже как множество сочленения. Наконец, назовем *множеством изоляции* графа порядка n любое множество из $n - 1$ его вершин.

Число связности графа G определяется как наименьшее число элементов множества, являющегося множеством сочленения или

изоляции для G , и обозначается через $\omega(G)$. Говорят, что граф G является h -связным, если $\omega(G) \geq h$, где h — данное целое число ≥ 0 .

Пример 1. Турнирная диаграмма. Понятие связности очень важно, когда надо организовать встречи между n игроками, участвующими в турнире, ограничивая общее количество встреч числом m . Турнир будет справедливым, если небольшая группа игроков не может „изолировать“ одного или

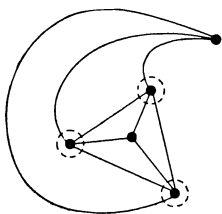


Рис. 20—4.

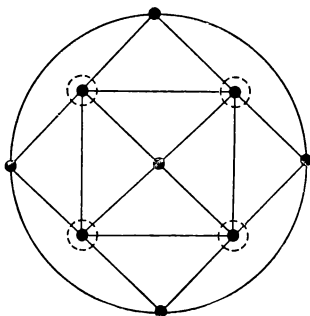


Рис. 20—5.

нескольких соперников, то есть если соответствующий граф с n вершинами и m ребрами обладает достаточно большим числом связности. Например, при 5 игроках и 9 встречах следует принять граф, изображенный на рис. 20—4, который является 3-связным; множество сочленения состоит из трех игроков, отмеченных пунктирными кружками. При 9 игроках и 20 встречах следует принять граф, изображенный на рис. 20—5 и являющийся 4-связным, и т. д.

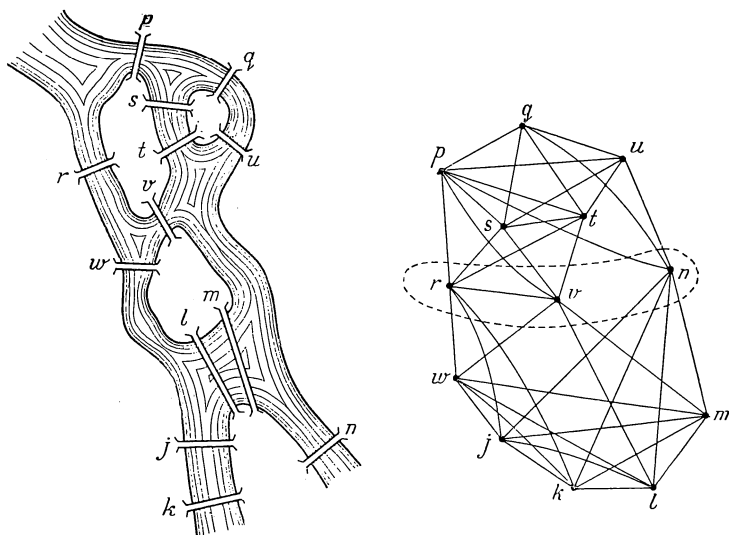
Пример 2. Бомбардировка путей сообщения. Обычно считается, что экономическая и военная мощь вражеской страны существенно парализована, если в результате бомбардировки коммуникаций удалось полностью изолировать один или несколько районов. Задача состоит в следующем: какое количество (наименьшее) путей сообщения надо разрушить для достижения этой цели? Построим граф (X, U) , вершины которого изображают районы с богатыми и удачно расположенными внутренними коммуникациями, а ребра — уязвимые пути сообщения (например, мосты, тоннели, железные дороги и т. п.), связывающие эти районы между собой. Задача сводится к нахождению наименьшего числа ребер, удаление которых нарушает связность графа.

Можно обратиться к теории связности, строя вспомогательный граф (U, Δ) , вершинами которого служат ребра из U , причем $u \in \Delta v$, когда ребра u и v смежны. Если, например, ставится задача бомбардировки мостов, изображенных на рис. 20—6 (слева), то получается граф, изображенный справа, который является 3-связным;

множеству сочленения $\{r, v, n\}$ отвечают три моста, разрушения которых достаточно для достижения поставленной цели.

В дальнейшем везде h будет обозначать натуральное число; говоря, что некоторый граф G порядка n является „ h -связным“, мы будем иметь в виду следующее:

- (1) G связан,
- (2) $h < n$,
- (3) G не имеет множеств сочленения A с числом элементов $|A| < h$. Граф G является 2-связным тогда и только тогда,



Р и с. 20—6.

когда он не имеет точек сочленения; те свойства h -связных графов, которые мы теперь будем рассматривать, представляют собой обобщения изложенных выше теорем о графах без сочленений.

Теорема 6. В h -связном графе степень каждой вершины $\geq h$.

Действительно, пусть G — произвольный h -связный граф, x_0 — одна из его вершин. Допустим, что x_0 является граничной точкой не более чем $h - 1$ ребер, и рассмотрим множество A , составленное вторыми граничными точками этих $h - 1$ ребер. Так как граф h -связен, то

$$h - 1 \leq (n - 1) - 1 = n - 2.$$

Поэтому в G найдется вершина, отличная от x_0 и не принадлежащая A ; значит, A есть множество сочленения. Ввиду того что

$|A| = h - 1 < h$, граф не является h -связным, вопреки условию теоремы.

Теорема 7. *Подграф G' , полученный из h -связного графа G удалением одной вершины, является $(h - 1)$ -связным.*

В самом деле, из $h < n$ вытекает

$$h - 1 < n - 1 = n'.$$

Кроме того, для нарушения связности графа G' необходимо удалить по меньшей мере $h - 1$ вершин; поэтому G' является $(h - 1)$ -связным.

Теорема Уитни [5]. *Для h -связности графа необходимо и достаточно, чтобы любые две его вершины a_0 и z можно было соединить h различными элементарными цепями, не имеющими общих вершин, кроме a_0 и z .*

Условие достаточно. В самом деле, если две произвольные вершины соединены h различными цепями, то граф G связан. Среди h цепей, соединяющих две вершины a_0 и z , имеется не более одной длины 1, а остальные $h - 1$ цепей вместе содержат не менее $h - 1$ различных вершин (отличных от a_0 и z), значит

$$n \geq (h - 1) + 2 > h.$$

Наконец, у G нет множества сочленения A с числом элементов $|A| < h$, потому что если бы такое A имелось, то, выбрав две точки a_0 и z в двух различных компонентах подграфа, порожденного множеством $X \setminus A$, мы не смогли бы провести h цепей без общих вершин так, чтобы эти цепи соединяли a_0 с z и проходили через A .

Условие необходимо. Надо показать, что если граф G является h -связным, то любые две его вершины можно соединить h непересекающимися элементарными цепями. При $h = 2$ утверждение уже доказано (теорема Менгера); допустим, что теорема справедлива для всех $(h - 1)$ -связных графов, и докажем ее справедливость для произвольного h -связного графа G . Иначе говоря, мы рассмотрим две вершины a_0 и z графа G и покажем, что их можно соединить h элементарными цепями без общих вершин.

Поскольку G не имеет точек сочленения (так как $h \geq 2$), a_0 и z можно соединить двумя непересекающимися цепями, из которых хотя бы одна, скажем

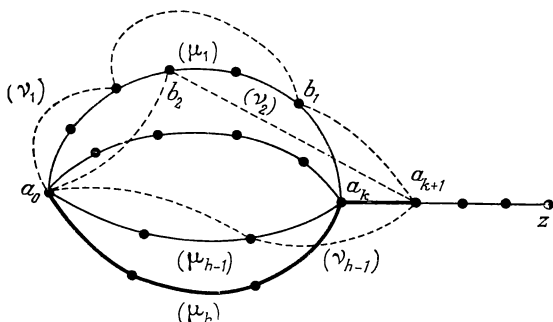
$$\mu = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_q, z],$$

имеет длину ≥ 2 .

Вершины a_0 и a_2 соединены h непересекающимися цепями; в самом деле, если разрушить цепь $[a_0, a_1, a_2]$, удалив из графа вер-

шину a_1 , то оставшийся граф будет $(h-1)$ -связным (теорема 7) и в нем a_0 будет соединена с a_2 посредством $h-1$ непересекающихся цепей. Теперь надо показать, что если a_0 и a_k можно соединить h непересекающимися цепями, то можно также соединить a_0 с a_{k+1} посредством h непересекающихся цепей. Обозначим цепи, соединяющие a_0 с a_k , через $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_h$.

1° Сначала предположим, что никакая из цепей $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_h$ не содержит a_{k+1} . Так как граф, полученный удалением a_k , является $(h-1)$ -связным, то вершины a_0 и a_{k+1} соединены непересекающимися цепями $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{h-1}$, не проходящими через a_k .



Р и с. 20—7.

При помощи $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_h, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{h-1}$ мы будем составлять непересекающиеся цепи, соединяющие a_0 и a_{k+1} , следующим процессом:

1) Идя по цепи ν_1 от a_{k+1} к a_0 , обозначим через b_1 первую точку встречи с $\bigcup_{i=1}^h \mu_i$ (отличную от a_{k+1}); допустим, например, что $b_1 \in \mu_1$, и положим

$$\mu'_1 = \mu_1[a_0, b_1] + \nu_1[b_1, a_{k+1}].$$

2) Идя по цепи ν_2 от a_{k+1} к a_0 , обозначим через b_2 первую точку встречи с $\mu'_1 \cup \bigcup_{i=2}^h \mu_i$ (отличную от a_{k+1}); рассмотрим два случая. Если $b_2 \in \mu_i$, где $i > 1$, то положим, как прежде,

$$\mu'_i = \mu_i[a_0, b_2] + \nu_2[b_2, a_{k+1}].$$

Если же $b_2 \in \mu'_1$ (см. рис. 20—7), то аннулируем операцию 1) и положим

$$\mu'_1 = \mu_1[a_0, b_2] + \nu_2[b_2, a_{k+1}];$$

при этом мы скажем, что цепь μ'_1 *перевоплотилась*, и в дальнейшем переставим индексы 1 и 2 у ν_1 и ν_2 .

ГЛАВА 21

Плоские графы

Основные свойства

Говорят, что граф (или мультиграф) G — *плоский*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы вершинам отвечали различные точки, ребрам — простые дуги и чтобы никакие два ребра не имели общих точек, отличных от их границ. Изображение G на плоскости, удовлетворяющее этим условиям, называется *плоским топологическим графом*, и мы будем обозначать его той же буквой G ; плоские графы, которые можно преобразовать друг в друга непрерывной деформацией плоскости, не считаются различными.

ПРИМЕР. *Задача о трех городах и трех источниках снабжения*¹⁾. Имеются три города a, b, c и три источника снабжения: водонапорная башня d , газовый завод e , электростанция f (см. рис. 21—1); каждый из городов связан с каждым источником снабжения соответственно водопроводом, газопроводом, линией электропередачи. Можно ли начертить (на плане) три города, три источника и все линии передачи таким образом, чтобы никакие две линии не пересекались между собой в неконцевых точках? Непосредственные попытки показывают, что всегда можно нарисовать 8 линий, а девятая обязательно пересечет хотя бы одну из этих восьми. Ниже мы познакомимся с объяснением этого факта.

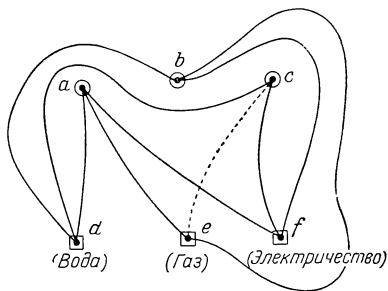


Рис. 21—1.

Пусть G — плоский топологический граф; его *гранью* называется область плоскости, ограниченная ребрами и не содержащая внутри себя ни вершин, ни ребер; будем обозначать грани буквами r, s, t , а множество граней — буквой R . *Край* грани r — это цикл, образованный граничными ребрами r . Две грани r и s называются *смеж-*

¹⁾ Эта задача хорошо известна у нас как „задача о трех домах и трех колодцах“. — *Прим. перев.*

ными, если их края имеют хотя бы одно общее ребро; грани, соприкасающиеся только в отдельных вершинах, смежными не считаются.

Пример. Географическая карта (при условии, что нет островных стран) представляет собой плоский топологический граф; этот граф

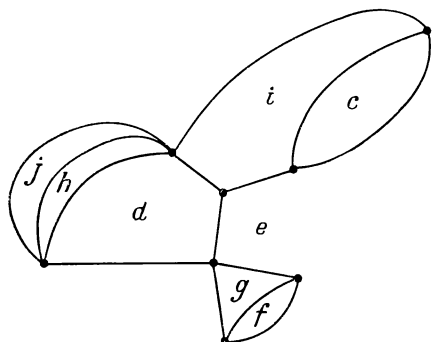


Рис. 21—2.

имеет ту особенность, что степени всех его вершин ≥ 3 . Греть может примыкать к какой-либо другой грани в нескольких местах. Заметим, что на рис. 21 — 2 грани d и g не смежны, хотя имеют общую вершину. Строго говоря, граф, изображенный на рис. 21 — 2, является мультиграфом. Наконец, отметим, что у всякого плоского графа имеется одна, притом единственная, неограниченная грань, называемая

бесконечной гранью (на рис. 21 — 2 грань e); остальные грани (c, d, f, g, h, i, j) — *конечные*.

Теорема 1. В плоском топологическом графе G края различных конечных граней образуют базу независимых циклов. Теорема очевидна, когда G имеет 2 конечные грани; предположим ее справедливой для всех графов с числом конечных граней $f - 1$ и покажем, что она верна для произвольного плоского топологического графа G с f конечными гранями.

В самом деле, удаляя из G некоторое ребро u , мы получим граф G' , имеющий $f - 1$ конечных граней, края которых, согласно предположению, образуют базу независимых циклов. Восстановив ребро u , получим новую конечную грань, край которой является циклом, не зависящим от предыдущих (поскольку он содержит ребро, не принадлежащее ни одному из них). Так как добавление одного ребра не может увеличить цикломатическое число более чем на единицу, то конечные грани графа G определяют базу независимых циклов.

Следствие 1. Если связный плоский топологический граф имеет n вершин, t ребер и f граней, то

$$n - t + f = 2 \quad (\text{формула Эйлера}).$$

Действительно, число конечных граней равно цикломатическому числу ν , поэтому

$$f = \nu + 1 = (t - n + 1) + 1 = t - n + 2.$$

Отсюда и получается доказываемая формула.

Следствие 2. В любом плоском графе (не являющемся мультиграфом) хотя бы одна вершина x имеет степень $d(x) \leq 5$.

В самом деле, у соответствующего плоского топологического графа каждая грань окаймлена по меньшей мере тремя различными ребрами; если образовать простой граф инцидентий грани — ребра ¹⁾, то число его дуг будет $\leq 2m$, с одной стороны, и $\geq 3f$, с другой, поэтому $f \leq \frac{2m}{3}$. Если бы в исходном графе каждая вершина была инцидентна не менее чем шести ребрам, то таким же образом ²⁾ мы получили бы $n \leq \frac{2m}{6}$; значит, в силу формулы Эйлера,

$$2 = n - m + f \leq \frac{m}{3} - m + \frac{2m}{3} = 0,$$

что невозможно.

Следствие 3. Географическая карта обладает по крайней мере одной такой гранью, край которой содержит не более 5 ребер.

Действительно, в географической карте каждая вершина является граничной точкой не менее чем трех ребер; образуя простой граф инцидентий вершины — ребра, получим, что число ребер, с одной стороны, $\leq 2m$, а с другой стороны, $\geq 3n$, откуда $n \leq \frac{2m}{3}$. Если допустить, что каждая грань обладает краем по меньшей мере с 6 ребрами, и образовать простой граф инцидентий грани — ребра, то получим, что число его дуг $\leq 2m$ и в то же время $\geq 6f$; значит, $f \leq \frac{2m}{6}$. Отсюда

$$2 = n - m + f \leq \frac{2m}{3} - m + \frac{m}{3} = 0,$$

что невозможно.

Формула Эйлера, доказанная в следствии 1, имеет многочисленные применения.

Пример 1 (Эйлер). Рассмотрим в трехмерном пространстве связный многогранник с n вершинами, m ребрами, f гранями. Его, очевидно, можно изобразить на сфере таким образом, чтобы никакие два ребра не пересекались в точках, отличных от граничных; производя затем стереографическое проектирование с центром внутри одной из граней, получим изображение на плоскости. Это изображение будет плоским графом, поэтому имеет место основное соотношение для связных многогранников: $n - m + f = 2$.

¹⁾ Т. е. граф, состоящий из множества X точек, изображающих грани, множества Y точек, изображающих ребра, и из дуг, соединяющих $x \in X$ с $y \in Y$ всякий раз, когда грань x инцидентна ребру y .

²⁾ Рассмотрев простой граф инцидентий вершины — ребра. — *Прим. ред.*

ПРИМЕР 2. С помощью формулы Эйлера покажем, что граф, рассматриваемый в задаче о трех городах и трех источниках снабжения (рис. 21—2), не может быть плоским. Допустив, что он плоский, мы имели бы

$$f = 2 - n + m = 2 - 6 + 9 = 5.$$

Край каждой грани содержит не менее 4 ребер (так как если бы край какой-либо грани имел только три ребра, то граничными точками этих ребер были бы три вершины, из которых две принадлежат к одной и той же категории: города или источники снабжения; но две вершины одной и той же категории не смежны). Образуя простой граф инцидентий грани — ребра, мы получим, что число дуг $\leq 2m$ и в то же время $\geq 4f$, следовательно,

$$18 = 2m \geq 4f = 20,$$

что невозможно.

ПРИМЕР 3. Таким же образом покажем, что полный граф с 5 вершинами не является плоским. Предполагая его плоским, мы получили бы

$$f = 2 - n + m = 2 - 5 + 10 = 7.$$

Каждая грань имеет на своем крае не менее 3 ребер. Образуя простой граф инцидентий грани — ребра, найдем, что число дуг $= 2m$ и в то же время $\geq 3f$, откуда

$$20 = 2m \geq 3f = 21,$$

что невозможно.

Граф, рассматриваемый в задаче о трех городах и трех источниках снабжения, а также полный граф с пятью вершинами позволяют определить целое семейство неплоских графов: как видно из

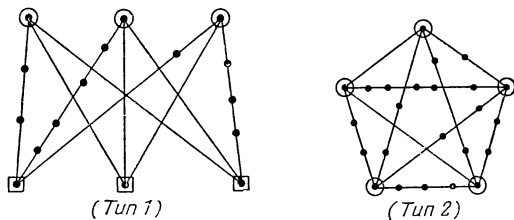


Рис. 21—3.

рис. 21—3, достаточно поместить на каждое ребро сколько угодно вершин и таким образом определить новый неплоский граф типа 1 или типа 2. Этот результат можно обратить, что даст нам трудную

теорему, принадлежащую Куратовскому¹⁾, доказательство которой мы собираемся здесь привести. Предварительно договоримся в отношении языка: если μ — некоторый элементарный цикл (на котором мы произвольно задаем направление) и если $a, b \in \mu$, то через $\mu[a, b]$ будем обозначать последовательность вершин, встречающихся при движении от a к b в положительном направлении (включая a и b), а через $\mu]a, b[$ — ту же последовательность, но без a и b . Далее, если G — граф с множеством сочленения A , то *куском* графа G (относительно A) назовем всякую связную компоненту C подграфа, порожденного множеством $X \setminus A$, к которой добавлены ребра, инцидентные C (вместе со своими граничными точками).

Теорема Понтрягина — Куратовского. Необходимое и достаточное условие, при котором граф G является плоским, состоит в том, что граф не должен содержать частичных подграфов типа 1 и типа 2.

Ясно, что граф, содержащий частичный подграф типа 1 или типа 2, не может быть плоским; покажем, что и наоборот, *если граф не содержит частичных подграфов типа 1 и 2, то он плоский.*

Утверждение тривиально для графов G с одним, двумя или тремя ребрами; далее будем рассуждать по индукции: допустим, что утверждение верно для всех графов, имеющих менее m ребер, и докажем его для произвольного графа G с m ребрами.

Пусть G — граф с m ребрами, не имеющий частичных подграфов типа 1 или 2 и в то же время не плоский. Этот граф связан, ибо в противном случае все его компоненты были бы плоскими, а значит, и он сам был бы плоским. Далее, G — граф без сочленений, иначе его куски относительно точки сочленения a были бы плоскими, но эти куски можно изобразить на плоскости так, чтобы точка a оказалась на бесконечных гранях этих изображений (при помощи надлежащего стереографического проектирования); значит, граф G тоже был бы плоским.

1° Покажем, что *после удаления из G произвольного ребра $[a, b]$ сохранится некоторый элементарный цикл μ , проходящий через a и b .* Действительно, в противном случае граф G' , получаемый из G удалением ребра $[a, b]$, имел бы точку сочленения (в силу теоремы Менгера, гл. 20); вершины a и b принадлежали бы двум различным кускам C_a и C_b относительно точки сочленения c ²⁾. Граф C'_a , полученный из C_a присоединением ребра $[a, c]$, — плоский, так как он не содержит подграфов типа 1 и 2 (как граф,

¹⁾ Эта теорема была установлена (но не опубликована) в 1927 году Л. С. Понтрягиным, а в 1930 году, независимо от него, вторично доказана Куратовским [4]. В дальнейшем мы называем ее *теоремой Понтрягина — Куратовского*. — *Прим. перев.*

²⁾ Иначе c была бы точкой сочленения исходного графа G . — *Прим. перев.*

образуемый из G посредством стягиваний). Поэтому можно при помощи стереографического проектирования изобразить C'_a на плоскости таким образом, чтобы ребро $[a, c]$ оказалось на крае бесконечной грани. По той же причине граф C'_b , полученный из C_b присоединением ребра $[b, c]$, можно изобразить на плоскости так, чтобы $[b, c]$ оказалось на крае бесконечной грани. Соединяя затем a с b , получим плоский топологический граф, содержащий G , что невозможно в силу предположения относительно G .

2° В плоском топологическом графе G' , полученном в результате удаления ребра $[a, b]$, рассмотрим элементарный цикл μ , проходящий через a и b и охватывающий наибольшее возможное количество граней. Придадим циклу μ произвольную ориентацию; μ разделяет плоскость на две области; всякий кусок относительно μ графа G' , вершины которого лежат во внутренней (соответственно внешней) области, назовем *внутренним куском* (соответственно *внешним куском*)¹⁾. *Никакой внешний кусок не может содержать более одной вершины последовательности $\mu[a, b]$* (иначе можно было бы построить цикл μ , охватывающий большее число граней); так как то же самое справедливо и для $\mu[b, a]$, то *внешний кусок может пересекать μ только в одной или в двух точках*. Кроме того, существуют по крайней мере один внешний и один внутренний кусок, каждый из которых пересекает как $\mu]a, b[$, так и $\mu]b, a[$ (ибо поместить на плоскости ребро $[a, b]$ невозможно).

3° Покажем, что *существуют внутренний кусок C и внешний кусок D , каждый из которых пересекает как $\mu]a, b[$, так и $\mu]b, a[$, причем эти куски таковы, что точки c и d пересечения D с μ и точки e и f пересечения C с μ расположены на μ в чередующемся порядке: c, e, d, f .*

В самом деле, допустим, что это не так: пусть C_1 — некоторый внутренний кусок, пересекающий $\mu]a, b[$ и $\mu]b, a[$, пусть e_1 и f_1 — соответственные точки пересечения на μ . Можно начертить непрерывную линию ν , соединяющую f_1 и e_1 , проходящую во внешней области по отношению к μ и не пересекающую никакого из наличных ребер (поскольку, согласно предположению, не существует внешних кусков, встречающих как $\mu]e_1, f_1[$, так и $\mu]f_1, e_1[$).

Всякий внутренний кусок, имеющий общие точки только с $\mu[f_1, e_1]$, можно переместить во внешнюю область, в грань, содержащую линию ν ; именно этот случай имеет место для куска C_1 . Но обязательно останется хотя бы один внутренний кусок C_2 , который невозможно так переместить (иначе a и b можно было бы соединить в плоскости), и этот кусок имеет с $\mu[f_1, e_1]$ две последовательные

¹⁾ Кроме того, внутренним (соответственно внешним) куском следует называть всякое ребро, которое проходит во внутренней (соответственно внешней) области и обе граничные точки которого принадлежат μ . — Прим. перев.

6° Если $e = a$, $f \neq b$ (например, пусть $f \in]a, b[$), то получается граф, изображенный на рис. 21—6 и содержащий граф типа 1, что невозможно.

7°. Если $e = a$, $f = b$, то можно предположить, что $g = d$ и $h = c$ (в противном случае мы возвращаемся к одной из фигур, исключенных в п. 4° и п. 6°). Мыслимы две ситуации: если цепи графа C , соединяющие cd и ef , имеют более одной общей вершины, то мы получаем граф, изображенный на рис. 21—7, который содержит граф типа 1, что невозможно; если же цепи C , соединяющие cd и ef , не имеют двух общих вершин, то мы получаем граф, изображенный на рис. 21—8, который содержит граф типа 2, что опять невозможно.

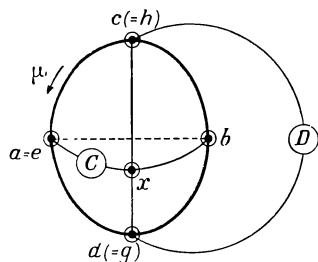


Рис. 21—8.

Поскольку все мыслимые случаи расположения e и f рассмотрены, то описанный выше граф G существовать не может. Теорема доказана.

Теорема 2. *Всякий плоский граф является 5-хроматическим.*

Теорема заведомо справедлива для плоских графов с 1, 2, 3, 4, 5 вершинами; допустим, что она верна для плоских графов с $n-1$ вершинами, и докажем ее для произвольного плоского графа G с n вершинами.

Действительно, в силу следствия 2, в G имеется вершина x , смежная с 0, 1, 2, 3, 4 или 5 вершинами. Подграф, получаемый удалением x , является 5-хроматическим; раскрасим его вершины пятью цветами: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$. Вершину x легко окрасить всегда, кроме случая, когда она смежна с пятью различно окрашенными вершинами.

В этом случае пусть a, b, c, d, e — пять смежных с x вершин (в порядке обхода вокруг x) и пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ — их цвета. Обозначим через $G_{\alpha, \beta}$ подграф, порожденный множеством вершин цвета α или цвета β , и т. п.

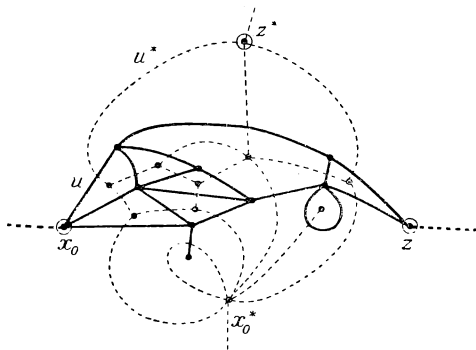
1° Если a и c принадлежат различным компонентам связности графа $G_{\alpha, \gamma}$, то в компоненте, содержащей a , перекрасим вершины цвета α в цвет γ , и наоборот. Новая окраска совместима с графом G , а вершину x , которая окружена теперь вершинами с окраской $\gamma, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, можно окрасить в цвет α .

2° Если a и c принадлежат одной и той же компоненте графа $G_{\alpha, \gamma}$, то вершины b и d нельзя соединить в графе $G_{\beta, \delta}$. Переставляя цвета β и δ в той компоненте графа $G_{\beta, \delta}$, которая содержит вершину b , мы получим возможность окрасить x в цвет β .

Этот результат, по-видимому, может быть улучшен; так называемая гипотеза четырех красок состоит в следующем не дока-

занном до сих пор утверждении: *всякий плоский граф является 4-хроматическим*¹⁾).

Гипотезу четырех красок можно сформулировать иначе, обратившись к понятию *двойственности*. Рассмотрим связный плоский

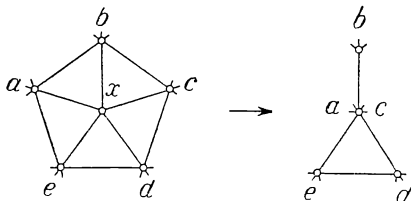


Р и с. 21—9.

топологический граф G без изолированных вершин; ему можно поставить в соответствие плоский топологический граф G^* следующим образом.

¹⁾ При доказательстве теоремы 2 индукцию по числу вершин графа G можно провести еще и так. [См., например, Дынкин Е. Б. и Успенский В. А., Математические беседы, ГТТИ, 1952].

Пусть x смежна с пятью вершинами a, b, c, d, e ; удаляя x и отождествляя a с c , как показано на рисунке, получим граф G' с меньшим числом вершин, допускающий (в силу предположения индукции) раскраску 5 цветами; при этом для четырех вершин $a = c, b, d, e$ будет использовано не более 4 красок, и в исходном графе можно окрасить x пятой краской.



Здесь индукция носит *локальный* характер: для получения раскраски графа G из раскраски G' не надо перекрашивать тех вершин, которые не затрагиваются преобразованием $G \rightarrow G'$.

В случае четырех красок, вместо пяти, конкретные примеры показывают, что для получения раскраски графа G из раскраски графа G' , отличающегося от G только в одном месте, требуется, вообще говоря, *тотальное* перекрашивание. В этом, видимо, заключается причина неизмеримо большей трудности проблемы четырех красок по сравнению с задачей пяти красок.

Доказательство теоремы 2 в книге без необходимости использует тотальную индукцию и поэтому не способствует выявлению глубокой принципиальной разницы между случаями 4 и 5 красок. — *Прим. перев.*

Внутри каждой грани s графа G поместим вершину x^* графа G^* ; каждому ребру u графа G отнесем ребро u^* графа G^* , соединяющее те вершины x^* и y^* , которые соответствуют граням s и t по обе стороны от ребра u . Определенный таким образом топологический граф G^* является плоским (см. рис. 21—9), связным и не имеет изолированных вершин; он называется *двойственным* для G . Заметим, что

1° Граф, двойственный для G^* , есть G ; цикломатические числа обоих графов одинаковы.

2° Каждой петле графа G отвечает висящее ребро графа G^* , и наоборот.

3° Если G имеет точку сочленения, то G^* тоже имеет такую точку¹⁾.

4° Если G имеет пары вершин, соединенных несколькими ребрами, то G^* имеет вершины степени два (*антиузлы*).

Пример. Рассмотрим плоскую транспортную сеть (неориентированную) G , каждое ребро u которой обладает пропускной способностью $c(u) \geq 0$ и у которой вход x_0 и выход z расположены на одной горизонтали. Образует двойственный граф G^* , причем бесконечной грани графа G отнесем две различные вершины: нижней полуплоскости — вершину x_0^* , верхней полуплоскости — вершину z^* . Ребру u^* (отвечающему u) приписываем длину $l(u^*) = c(u)$. Рассмотрим теперь следующие задачи.

Задача 1. В G найти разрез V с наименьшей пропускной способностью, то есть минимизировать

$$c(V) = \sum_{v \in V} c(v).$$

Задача 2. В G^* найти кратчайший путь V^* из x_0^* в z^* , то есть минимизировать

$$l(V^*) = \sum_{v^* \in V^*} l(v^*).$$

Задача 1 равносильна задаче о наибольшем потоке, а задача 2 — задаче о кратчайшем пути, и ясно, что для плоского графа эти две задачи сводятся одна к другой.

Гипотеза четырех красок в двойственной форме гласит: *грани плоского графа G можно окрасить четырьмя цветами так, чтобы никакие две смежные грани не были окрашены в один и тот же цвет.*

Желая фактически окрасить граф G , мы можем ограничиться случаем связного графа (так как ничто не мешает нам окрашивать

¹⁾ Взаимоотношения между связностью G и связностью G^* были изучены Уитни [9].

каждую компоненту отдельно), а также считать G графом без сочленений. Можно предположить, что у графа нет вершин степени 0, 1 или 2. Можно ограничиться рассмотрением однородных графов степени 3, ибо каждую вершину x степени > 3 можно на время раскрашивания покрыть новой гранью, достаточно малой и имеющей общее ребро с каждой из граней, соприкасающихся в x . Полученный граф будет однородным степени 3, без перешейков (так как он не имеет точек сочленения) и, в силу теоремы 5 (гл. 19), принадлежать хроматическому классу ≤ 4 .

Лемма. В плоском графе каждому ребру u придадим некоторую ориентацию и поставим в соответствие натуральное число $\pi(u)$; для любой цепи μ и любого ребра $u \in \mu$ положим $\pi_\mu(u) = +\pi(u)$, если при движении по μ ребро u проходится в направлении его ориентации, и $\pi_\mu(u) = -\pi(u)$ в противоположном случае. Если край μ каждой грани удовлетворяет условию

$$\sum_{u \in \mu} \pi_\mu(u) \equiv 0 \pmod{4},$$

то граф является 4-хроматическим.

Всегда можно предполагать граф связным; каждую вершину x пометим некоторым коэффициентом $p(x)$, определяя эти коэффициенты шаг за шагом:

для некоторой произвольно выбранной вершины x_0 положим $p(x_0) = 0$;

для еще не помеченной вершины y , смежной с уже помеченной вершиной x , находим $p(y)$, образуя $p(x) + \pi(x, y)$ в случае, если ребро ориентировано от x к y , или $p(x) - \pi(x, y)$, если ребро ориентировано от y к x , и добавляя или вычитая число, кратное четырем, с тем чтобы оставшееся число было ≥ 0 и ≤ 3 .

Таким образом, функция $p(x)$ может принимать только значения 0, +1, +2, +3 и будет определена для всего графа (так как он связан); значение $p(x)$ для каждой вершины x определится однозначно, ибо если при определении $p(x)$ взяты два различных пути $\mu_1 = \mu_1[x_0, x]$ и $\mu_2 = \mu_2[x_0, x]$, то цикл $\mu_1 - \mu_2$ будет суммой краев некоторых граней (в силу теоремы 1); значит

$$\sum_{u \in \mu_1 - \mu_2} \pi_\mu(u) \equiv 0 \pmod{4},$$

или

$$\sum_{u \in \mu_1} \pi_{\mu_1}(u) \equiv \sum_{u \in \mu_2} \pi_{\mu_2}(u) \pmod{4}.$$

Придадим вершине x цвет $i = p(x)$; тогда все вершины окажутся окрашенными четырьмя различными цветами, причем никакие две смежные вершины не будут окрашены в один и тот же цвет.

Ч. И. Т. Д.

Теорема 3 (Тэт [7]). Пусть G — плоский однородный граф степени 3 без перешейков; необходимое и достаточное условие возможности такого раскрашивания граней графа 4 цветами, при котором никакие две смежные грани не окрашиваются в одинаковый цвет, состоит в том, чтобы G принадлежал к хроматическому классу 3.

1° Если грани G можно окрасить четырьмя цветами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, то пометим цифрой 1 ребра, разделяющие грани α и β или грани γ и δ ; цифрой 2 — ребра, разделяющие грани α и γ или грани β и δ ; цифрой 3 — ребра, разделяющие грани α и δ или грани β и γ . Два смежных ребра никогда не могут оказаться помеченными одной и той же цифрой (иначе имелись бы две смежные одинаково окрашенные грани); следовательно, граф G принадлежит хроматическому классу 3.

2° Если граф G принадлежит к хроматическому классу 3, то каждому ребру u^* двойственного графа G^* отнесем коэффициент $\pi(u^*)$, равный 1, 2 или 3, смотря по тому, имеет ли ребро u цвет 1, 2 или 3. Как показывает исследование однородных графов (гл. 19), всегда можно ориентировать ребра в соответствии с условиями леммы.

Тогда, в силу леммы, граф G^* будет 4-хроматическим, и теорема доказана.

Обобщение

Предыдущие понятия можно повторить и обобщить, обратившись к более продвинутому топологическим теориям, выходящим за рамки настоящей книги¹⁾. Мы ограничимся лишь кратким очерком.

Любой граф G можно представить в трехмерном пространстве так, чтобы никакие два ребра не пересекались; такое представление будем называть *топологическим графом* и обозначать снова через G . Если S — некоторая поверхность в пространстве R^3 и если существует взаимно-однозначное и непрерывное в обе стороны отображение σ графа G в S , то, как известно, никакие два ребра в σG не пересекаются; по определению, σG есть *S -топологический граф*. В случае, когда S — плоскость, мы возвращаемся к понятию *плоского топологического графа*.

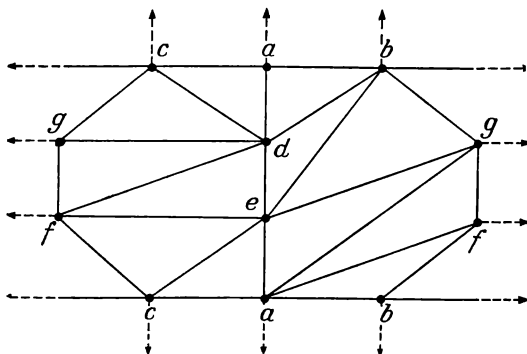
Чтобы не затруднять интуитивного понимания, ограничимся здесь конечными, замкнутыми и ориентируемыми поверхностями²⁾; для та-

¹⁾ См., например, Lefschetz S., Introduction to Topology, Princeton University Press, Princeton, 1949.

²⁾ Напомним, что топологическое пространство S есть *поверхность*, если каждая точка $x \in S$ обладает окрестностью, гомеоморфной внутренности круга; если все эти окрестности могут быть ориентированы когерентно, то поверхность S называется *ориентируемой*. Наконец, если S — компактное пространство, то говорят, что поверхность S *замкнута*; так, сфера является замкнутой поверхностью, плоскость — незамкнутой. Результаты, аналогичные упоминаемым здесь, можно установить и для неориентируемых поверхностей (см. [5]).

кой поверхности S можно определить ее *род* g как наибольшее количество замкнутых попарно непересекающихся кривых, начерченных на поверхности и не разбивающих ее. Так, сфера имеет род 0, тор (автомобильная камера) — род 1 и т. д.

Из общих теорем (см. [1]), следует, что каждый конечный граф можно представить на поверхности S достаточно большого рода; далее, S -топологическому графу G можно поставить в соответствие



Р и с. 21—10.

S -топологический граф G^* точно так же, как был определен *двойственный* граф в плоском случае. Если $\gamma(G)$ означает хроматическое число графа G , то положим

$$\gamma(S) = \max \{ \gamma(G)/G \text{ является } S\text{-топологическим} \};$$

$$\gamma'(S) = \max \{ n / \text{полный граф порядка } n \text{ является } S\text{-топологическим} \}.$$

Очевидно, $\gamma'(S) \leq \gamma(S)^1$.

Для поверхности S рода g положим

$$n_g = \text{целой части} \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{48g+1} \right).$$

Тогда

$$\begin{array}{lll} g=0 & (\text{сфера}) & \Rightarrow n_g=4, \\ g=1 & (\text{тор}) & \Rightarrow n_g=7, \\ g=2 & (\text{крендель}) & \Rightarrow n_g=8, \\ g=3 & & \Rightarrow n_g=9, \end{array}$$

и т. д. ...

Как показал Хедвуд²⁾, для поверхности S рода $g > 0$ (т. е. отличной от сферы) $\gamma(S) \leq n_g$.

¹⁾ Рингель показал [11], что для любой замкнутой поверхности S (ориентируемой или неориентируемой) рода $g \neq 0$ имеет место равенство $\gamma'(S) = \gamma(S)$. — Прим. перев.

²⁾ Доказательство см., например, в книге Гильберт Д. и Конфоссен С., Наглядная геометрия, ГТТИ, 1951.

Обратимся теперь к числу $\gamma'(S)$. Рингель показал [6], что на поверхности S рода $g > 0$

$$n_g - 2 \leq \gamma'(S) \leq n_g.$$

Хедвуд высказал предположение, что всегда $\gamma'(S) = n_g$; эта гипотеза была проверена Хефтером (Heffter) для $g = 1, 2, \dots, 7$ и Рингелем для $g = 8, 9$, а также для весьма большого количества других значений. Для тора T , например, где $g = 1$, имеем $\gamma'(T) = 7$, и полный граф с 7 вершинами можно поместить на торе, как показывает рис. 21—10; кроме того, $\gamma(T) \leq 7$ (вследствие формулы Хедвуда) и $\gamma(T) \geq \gamma'(T) = 7$, откуда окончательно $\gamma(T) = 7^1$).

¹⁾ Подробную библиографию по вопросам раскрашивания карт (и графов) можно найти в статье Кокстера [10]. — *Прим. перев.*

Добавления

1. Об общей теории игр

В главе 6 мы дали общее определение игры с полной информацией; если не ограничиваться рассмотрением только той информации, которую дает игрокам положение игры, то определение игры усложнится, но граф, задаваемый правилом игры, может по-прежнему изучаться на основе тех же общих принципов.

Для двух игроков (A) и (B) определена *игра*, если заданы:

1° Абстрактное множество X , элементы которого представляют собой *положения* игры.

2° Отображение Γ множества X в себя, называемое *правилом* игры.

3° Разбиение (X_0, X_A, X_B) множества X ; при этом

$$X_0 = \{x/\Gamma x = \emptyset\};$$

говорят, что в любом положении из X_A *ход* (или *право играть*) принадлежит игроку (A), а в любом положении из X_B ход принадлежит игроку (B).

4° Разбиение $\mathcal{U} = (U_1, U_2, \dots)$ множества X_A и разбиение $\mathcal{V} = (V_1, V_2, \dots)$ множества X_B ; \mathcal{U} называется *схемой информации* игрока (A), $U \in \mathcal{U}$ — *множеством информации* игрока (A); предполагается, что мощности множеств Γx при всех положениях x из одного и того же множества информации одинаковы.

5° Для каждого множества информации U — семейство $\{v_h/h \in H_U\}$ таких однозначных отображений U в X , что

$$(1) \quad h \neq k \Rightarrow v_h x \neq v_k x,$$

$$(2) \quad x \in U \Rightarrow \{v_h x/h \in H_U\} = \Gamma x;$$

если $y = v_h x$, то говорят, что h есть *индекс* положения y относительно x .

6° Для множества $Z = \{x/\Gamma^{-1}x = \emptyset\}$ — *основной вероятностный закон* $\pi_0 = \{\pi_0(z)/z \in Z\}$.

7° Две числовые функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на X и называемые *функциями предпочтения* игроков (A) и (B).

Партия протекает следующим образом: начальное положение x_0 выбирается в Z наудачу, в соответствии с известным вероятностным законом π_0 ; если множество информации U , содержащее x_0 , принадлежит \mathcal{U} , то игрок (А) будет знать не положение x_0 , а только содержащее его множество информации U . Имеем

$$\Gamma x_0 = \{v_h x_0 / h \in H_U\}.$$

Тогда игрок (А) выбирает в H_U некоторый индекс h , определяя тем самым положение игры $x_1 = v_h x_0$. Если $x_1 \in X_B$, то игрок (В), не знающий всего происходившего до этого и информированный лишь о том, что положение игры принадлежит множеству $V \in \mathcal{V}$, выбирает индекс k в H_V ; это приводит к новому положению игры $x_2 = v_k x_1$; и т. д. Игра окончена, если положение x таково, что $\Gamma x = \emptyset$.

Стратегией σ игрока (А) называется однозначное отображение, относящее каждому множеству U из \mathcal{U} такой индекс $h = \sigma U$, что $\sigma U \in H_U$; множество этих индексов обозначим через Σ_A ; говорят, что (А) *придерживается* стратегии σ , если каждый раз, когда положение игры принадлежит множеству $U \in \mathcal{U}$, он обязательно выбирает индекс $h = \sigma U$.

Если два игрока придерживаются соответственно стратегий σ и τ , то множество положений, получающихся из исходного x_0 , полностью определено, и это множество мы обозначим через $\langle x_0; \sigma, \tau \rangle$; *выигрыш* игрока (А), по определению, есть

$$f(x_0; \sigma, \tau) = \sup \{f(x) / x \in \langle x_0; \sigma, \tau \rangle\}.$$

Ожидание выигрыша игрока (А) есть

$$F(\sigma, \tau) = \sum_{z \in Z} \pi_0(z) f(z; \sigma, \tau).$$

Точно так же *ожидание выигрыша* игрока (В) есть

$$G(\sigma, \tau) = \sum_{z \in Z} \pi_0(z) g(z; \sigma, \tau).$$

Цель каждого игрока состоит в выборе такой стратегии, при которой ожидание его выигрыша будет наибольшим, с учетом возможностей выбора у противника.

Как и в главе 6, назовем пару (σ_0, τ_0) *точкой равновесия*, если

$$\begin{aligned} F(\sigma, \tau_0) &\leq F(\sigma_0, \tau_0) & (\sigma \in \Sigma_A), \\ G(\sigma_0, \tau) &\leq G(\sigma_0, \tau_0) & (\tau \in \Sigma_B). \end{aligned}$$

Если игроки придерживаются стратегий, представляемых парой (σ_0, τ_0) , то ясно, что никому из них не выгодно независимо от другого менять стратегию.

Ситуация, в которой оба игрока (A) и (B) выбирают одновременно точки σ и τ и в которой игроку (A) приписывается выигрыш $F(\sigma, \tau)$, а игроку (B) — выигрыш $G(\sigma, \tau)$, тоже есть игра, называемая *нормальной формой* первоначальной игры.

Пример 1. Каждая игра с *полной* информацией есть игра, схемой информации которой служит дискретное разбиение

$$\mathcal{U} = (\{x\} / x \in X_A).$$

Таковы, например, шашки, шахматы и др.

Пример 2. *Игра в бридж*. Представим себе партию в бридж после объявления: „Юг“ „раскрывает карты“. Если (A) означает лагерь Север — Юг, (B) — лагерь Восток — Запад, то получается игра двух лиц; будучи рассматриваем как один игрок, (B) тем не менее состоит из двух *агентов*, не передающих друг другу сведений, но имеющих общую цель. Z есть множество различных возможных „данных“. Обозначим через $C, Ю, B, Z$ множества карт, находящихся в данный момент в соответственных руках, через \bar{R} — множество карт, уже сброшенных, с указанием, кому они принадлежали и в какую взятку входили, через \bar{T} — множество карт, разложенных на столе во время очередной взятки, с указанием, кому они принадлежат (если это множество пусто, то \bar{T} указывает, чей ход).

Положение игры x будет определяться множествами $C, Ю, B, Z$ и „направленными“ множествами \bar{R} и \bar{T} .

Имеем $f(x) = h_1(\bar{R})$, $g(x) = h_2(\bar{R})$, где h_1 и h_2 — возрастающие функции, зависящие от применяемой системы обозначений. Например, для игрока Запад множеством информации U_0 , содержащим положение игры $x_0 = (C_0, Ю_0, B_0, Z_0, \bar{R}_0, \bar{T}_0)$, будет множество положений $(C, Ю, B, Z, \bar{R}, \bar{T})$, для которого

$$\begin{aligned} Z &= Z_0, \\ Ю &= Ю_0, \\ B \cup C &= B_0 \cup C_0, \\ \bar{T} &= \bar{T}_0, \\ \bar{R} &= \bar{R}_0. \end{aligned}$$

Пример 3. *Игры с совершенной информацией об игроке (B)*. Говорят, что некоторый игрок имеет *совершенную информацию* об игроке (B), если в данный момент игры ему известны множества информации, с которыми сталкивался игрок (B) в прошлом, а также индексы, которые он выбирал.

Говорят, что игра является *напоминанием для* (А), если игрок (А) имеет совершенную информацию о самом себе. Игра в бридж есть напоминание для Севера — Юга, но не для Востока — Запада.

Комбинированные стратегии

Чтобы исключить роль хитрости при принятии решения, Э. Борель ввел понятие *комбинированной стратегии*. Для определенности предположим, что стратегии игрока (А) образуют конечное множество $\sum_A = \{\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^m\}$, и рассмотрим некоторое распределение вероятностей $s = \{s^k/k = 1, 2, \dots, m\}$ в \sum_A ; имеем:

$$s_i^k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

$$\sum_{k=1}^m s_i^k = 1;$$

по определению, вектор $s = (s^1, s^2, \dots, s^m)$ есть *комбинированная стратегия игрока* (А). Простая стратегия, такая, как σ^k , представляет собой комбинированную стратегию вида $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Говорят, что игрок (А) *придерживается комбинированной стратегии* $s = (s^1, s^2, \dots, s^m)$, если он выбирает наудачу простую стратегию в \sum_A , приписывая стратегии σ^k вероятность s^k .

Теперь ясно, что такое поведение игрока (А) полностью сводит на нет проницательность противника, ибо наилучшее средство помешать игроку (А) состоит в том, чтобы самому не считаться с тем, что он собирался делать до принятия решения. Как мы увидим, имеются и другие, еще более важные преимущества.

Если (А) и (В) придерживаются соответственно комбинированных стратегий s и t , то *ожидание выигрыша* игрока (А) будет

$$F(s, t) = \sum_{i,j} s^i t^j F(\sigma^i, \tau^j).$$

Обозначая через S и T множества комбинированных стратегий обоих игроков, можно доказать основные результаты:

Теорема Фон Неймана — Нэша. В комбинированных стратегиях всегда существует точка *равновесия* (s_0, t_0) :

$$F(s, t_0) \leq F(s_0, t_0) \quad (s \in S),$$

$$G(s_0, t) \leq G(s_0, t_0) \quad (t \in T).$$

Теорема Куна — Бёрча. Если игрок (А) располагает совершенной информацией о своем противнике, то существует точка *равновесия* вида (s_0, t_0) , где $s_0 \in \sum_A$, $t_0 \in T$.

Наибольшее ожидание выигрыша для игрока (А), которое можно гарантировать при комбинированной стратегии, есть

$$\alpha_0 = \max_s \min_{\tau} F(s, \tau).$$

При простой же стратегии можно гарантировать

$$\alpha_1 = \max_{\sigma} \min_{\tau} F(\sigma, \tau).$$

Так как $\sum_A \supset S$, то $\alpha_0 \geq \alpha_1$, причем имеется много случаев, когда $\alpha_0 > \alpha_1$; поэтому *выбор комбинированной стратегии позволяет гарантировать больше, чем выбор простой стратегии*. Более того, *никакой способ игры не позволяет гарантировать больше, чем позволяет гарантировать комбинированная стратегия* (как показывает теорема Фон Неймана — Нэша при $G = -F$).

Пример (Кун). Рассмотрим игру, определяемую рис. 1: граф (X, Γ) здесь представляет собой прадеерево, $f(x) = -g(x)$ и значения функции $f(x)$ в различных концевых вершинах равны 0, 1, -1, 2

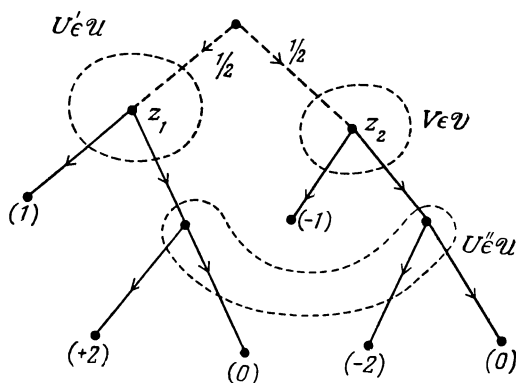


Рис. 1.

и -2, как показано на рисунке [значение $f(x)$ в остальных вершинах можно считать равным $-\infty$, и это не помешает, так как игра конечна]. Принимаем $h = 1$ или 2, смотря по тому, идем мы вправо или влево.

Основной вероятностный закон есть $\pi_0 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$, а выбираемая наудачу с одной и той же вероятностью вершина есть z_1 или z_2 .

Конкретно эта игра описывается следующим образом. Игрок (А) состоит из двух агентов (A') и (A''), не имеющих права непосредственно сообщаться, а игрок (В) представляет собой одного-единственного агента. Две карты, на одной из которых написано „старшая“,

а на другой — „младшая“, наудачу распределяются между агентом (A') и агентом (B); агент, обладающий старшей картой, получает один франк от обладателя младшей карты и может либо продолжить, либо прекратить игру. Если игра продолжается, то (A'), не зная данных, может либо взять карту у (A'), либо взять карту у (B), а ему отдать карту, принадлежавшую (A'). Снова владелец старшей карты получает один франк от обладателя младшей карты.

Ожидание выигрыша игрока (A) есть

$$F(\sigma, \tau) = \frac{1}{2} f(z_1; \sigma, \tau) + \frac{1}{2} f(z_2; \sigma, \tau).$$

Значения этой функции для различных возможных стратегий даны в следующей таблице:

		(B)	
		$\tau^1 V = 1$	$\tau^2 V = 2$
(A) →	$\sigma^1 U' = 1; \sigma^1 U'' = 1$	0	$-\frac{1}{2}$
	$\sigma^2 U' = 1; \sigma^2 U'' = 2$	0	$+\frac{1}{2}$
	$\sigma^3 U' = 2; \sigma^3 U'' = 1$	$\frac{1}{2}$	0
	$\sigma^4 U' = 2; \sigma^4 U'' = 2$	$-\frac{1}{2}$	0

Если игрок (A) придерживается простой стратегии, то он должен выбирать σ^2 или σ^3 , гарантирующие ему нулевой выигрыш (в то время как σ^1 и σ^4 гарантируют только $-\frac{1}{2}$). Допустим теперь, что он придерживается комбинированной стратегии $s_0 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, т. е. что он механически выбирает между σ^2 и σ^3 с одинаковыми вероятностями; это гарантирует $\frac{1}{4}$ вместо 0, ибо

$$F(s_0, \tau^1) = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{4},$$

$$F(s_0, \tau^2) = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{4}.$$

Нельзя гарантировать больше, так как если (B) будет придерживаться стратегии $t_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, то ожидаемый выигрыш окажется

$$F(s_0, t_0) = \frac{1}{4}.$$

Замечание. Определение наилучшей стратегии (комбинированной) есть не что иное, как линейная программа. В самом деле, игрок (A) может гарантировать по меньшей мере α тогда и только тогда, когда вектор $s = (s^1, s^2, \dots, s^m)$ таков, что

$$\begin{cases} s^i \geq 0 & (i = 1, 2, \dots, m), \\ \sum_{i=1}^m s^i = 1, \\ F(s, \tau^j) \geq \alpha & (j = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Если положить $F(s^i, \tau^j) = a_j^i$, $\frac{s^i}{\alpha} = x_i$ и допустить, что $\alpha > 0$, то получим

$$\begin{cases} x_i \geq 0 & (i = 1, 2, \dots, m), \\ \sum_{i=1}^m x_i = \frac{1}{\alpha}, \\ \sum_{i=1}^m a_j^i x_i \geq 1 & (j = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Ищется наибольшее число α , для которого эти соотношения совместны; задача сводится к нахождению таких x_i , что

$$\begin{cases} x_i \geq 0 & (i = 1, 2, \dots, m), \\ \sum_{i=1}^m a_j^i x_i \geq 1 & (j = 1, 2, \dots, n), \\ \sum_{i=1}^m x_i \text{ имеет наименьшее значение.} \end{cases}$$

II. О транспортных задачах

„Транспортной задачей“ называют всякую задачу, которая аналитически выражается следующим образом: даны целые числа a_i , b_j , c_j^i и d_j^i (где $i \leq m$, $j \leq n$); ищутся такие целые числа ξ_j^i , что

$$(1) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m \xi_j^i = b_j & (j \leq n), \\ \sum_{j=1}^n \xi_j^i = a_i & (i \leq m), \\ 0 \leq \xi_j^i \leq c_j^i & (i \leq m, j \leq n). \end{cases}$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_j^i \xi_j^i \text{ имеет свое наибольшее значение.}$$

Задачи такого типа встречаются особенно часто при планировании поставок, распределении товаров между потребителями и т. д., а также в вопросах, имеющих более теоретический интерес.

Транспортную задачу приписывали последовательно Хичкоку [7], который сформулировал ее в 1941 году; Купмансу [9], независимо изучавшему ее несколькими годами позднее; Л. В. Канторовичу [8], который исследовал непрерывный случай. В действительности Монж [11] сформулировал ее еще в 1781 году, и его исследования, весьма геометричные, были продолжены в 1928 году Аппелем [1].

Замечание 1. Если система вида (1) и (2) имеет решение ξ_j^i , то, очевидно,

$$(3) \quad a_i \geq 0, \quad b_j \geq 0, \quad c_j^i \geq 0.$$

Кроме того, складывая все ξ_j^i , получаем

$$(4) \quad \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m a_i.$$

Наконец, привлечем вспомогательную транспортную сеть с вершинами $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n, x_0, z$, у которой вход x_0

соединен с каждой точкой x_i дугой пропускной способности a_i , каждая точка x_i соединена с каждой точкой y_j дугой способности c_j^i , а каждая точка y_j соединена с выходом z дугой способности b_j . Если задача разрешима, то в силу теоремы Гейла (гл. 8)

$$(5) \quad \sum_{i=1}^m \max \left\{ a_i, \sum_{j \in J} c_j^i \right\} \geq \sum_{j \in J} b_j \quad (J \subset \{1, 2, \dots, n\}).$$

Условия (3), (4), (5), будучи необходимыми, в то же время достаточны для существования решения задачи.

Замечание 2. Можно считать, что все $d_j^i \geq 0$; действительно, в противном случае, полагая

$$h = -\min_{i,j} d_j^i > 0,$$

$$e_j^i = d_j^i + h > 0,$$

будем иметь

$$\sum_i \sum_j e_j^i \xi_j^i = \sum_i \sum_j d_j^i \xi_j^i + h \sum_i a_i.$$

Новая задача состоит в том, чтобы максимизировать $\sum \sum e_j^i \xi_j^i$. Это замечание показывает, что замена требования максимизации требованием минимизации не меняет характера задачи.

Пример 1 (Хичкок). Требуется назначить маршруты нефтеналивных судов, зная, что имеется m портов погрузки x_1, x_2, \dots, x_m и n портов разгрузки y_1, y_2, \dots, y_n ; допустим, что стоимость рейса из x_i в y_j составляет d_j^i и что порт погрузки x_i располагает a_i судами, а порт разгрузки y_j нуждается в b_j судах.

Если мы обозначим через ξ_j^i число судов, которое следует отправить из порта x_i в порт y_j , и будем стараться минимизировать полную стоимость $\sum_{i,j} d_j^i \xi_j^i$, то получим аналитическое выражение, указанное выше (где $c_j^i = +\infty$).

Пример 2. Задача о котловане и насыпи (Монж). Даны две поверхности S и T ; на первой поверхности S распределены массы, которые нужно перенести на вторую поверхность T таким образом, чтобы полная стоимость транспортировки была наименьшей.

Полагая $\xi_j^i = 1$, когда единица массы переносится из точки $x_i \in S$ в точку $y_j \in T$, и обозначая через d_j^i расстояние от x_i до y_j , мы придем к задаче минимизации выражения

$$\sum_i \sum_j d_j^i \xi_j^i.$$

(В действительности, ввиду непрерывного характера задачи, суммирование надо заменить интегрированием.)

Чисто геометрическими рассуждениями легко показать, что:

1° Оптимальная траектория единицы массы из $x_i \in S$ в $y_j \in T$ есть отрезок прямой $x_i y_j$, причем никакие два таких отрезка не пересекаются в точках, отличных от их концов.

2° Отрезки $x_i y_j$ образуют оптимальную систему, если существует выпуклая поверхность R , для которой все отрезки $x_i y_j$ служат нормальными.

Аналогичная задача возникает, когда некоторое количество вещества надо перенести „по чайной ложке“ из одного хранилища в другое.

Пример 3. Оптимальное назначение лиц на должности (Вото и Орден [13]). Имеется n рабочих x_1, x_2, \dots, x_n , которых надо распределить по n машинам y_1, y_2, \dots, y_n . Производительность рабочего x_i на машине y_j выражается числом d_j^i , которое легко находится посредством испытаний. Положим $\xi_j^i = 1$, если предполагается прикрепить рабочего x_i к машине y_j , и $\xi_j^i = 0$ в противном случае; задача состоит в максимизации полной производительности $\sum_{i,j} d_j^i \xi_j^i$ при условиях

$$\sum_{j=1}^n \xi_j^i = 1, \quad \sum_{i=1}^n \xi_j^i = 1.$$

Значит, мы имеем здесь дело с транспортной задачей.

Пример 4. Распределение товара по транспортной сети (Орден [12]). Рассмотрим граф (ориентированный) с n вершинами x_1, x_2, \dots, x_n и пропускными способностями $c_j^i = c(x_i, x_j)$ его дуг, а также некоторое целое число $p \leq n$; допустим, что в каждой вершине x_i , где $i \leq p$, имеется в избытке некоторое количество a_i товара, а в каждой вершине x_i , где $i > p$, имеется потребность размера b_i в этом товаре.

Допустим еще, что

$$\sum_{i \leq p} a_i = \sum_{j > p} b_j = h.$$

Если (x_i, x_j) — дуга графа, то можно перевезти из x_i в x_j некоторое количество $\xi_j^i \geq 0$ товара, причем стоимость перевозки единицы товара равна d_j^i . Требуется удовлетворить все потребности, минимизируя полную стоимость перевозок $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_j^i \xi_j^i$.

Для приведения этой задачи к каноническому виду будем искать такие числа η_j^i , чтобы

$$\begin{aligned}\eta_j^i &= \xi_j^i && \text{при } i \neq j, \quad (x_i, x_j) \in U; \\ \eta_j^i &= 0 && \text{при } i \neq j, \quad (x_i, x_j) \notin U; \\ \eta_j^i &= h - \sum_{k \neq j} \xi_j^k && \text{при } i = j.\end{aligned}$$

Эти числа η_j^i удовлетворяют условиям:

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{j=1}^n \eta_j^i &= h \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \sum_{j=1}^n \eta_j^i &= h + a_i \quad (i \leq p), \\ \sum_{j=1}^n \eta_j^i &= h - b_i \quad (i > p), \\ 0 \leq \eta_j^i &\leq c_j^i \quad (i \neq j), \\ 0 \leq \eta_j^i &\leq h \quad (i = j). \end{aligned} \right.$$

Требуется минимизировать $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_j^i \eta_j^i$, где

$$e_j^i = \begin{cases} 0 & \text{при } i = j; \\ d_j^i & \text{при } i \neq j, \quad (x_i, x_j) \in U; \\ +\infty & \text{при } i \neq j, \quad (x_i, x_j) \notin U. \end{cases}$$

Мы получили искомую каноническую форму.

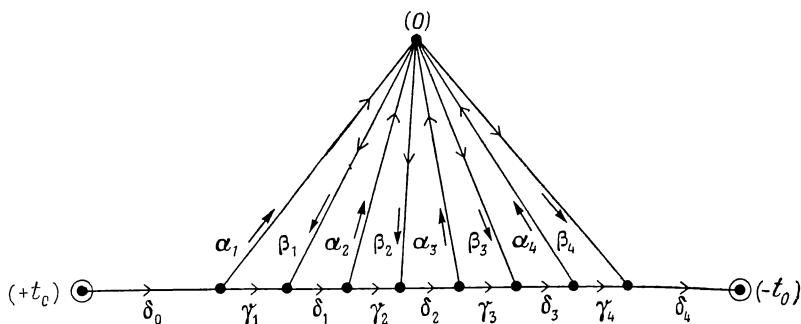
ПРИМЕР 5. Задача о складе (Кан [2]). Рассмотрим наличные количества некоторого товара на складе в различные моменты времени $1, 2, \dots, n$ и допустим, что известны:

k — полная вместимость склада;
 t_0 — начальное количество хранящегося товара;
 p_i — стоимость продажи (за единицу) во время i ;
 q_i — стоимость покупки (за единицу) во время i ;
 r_i — стоимость хранения (за единицу) во время i .

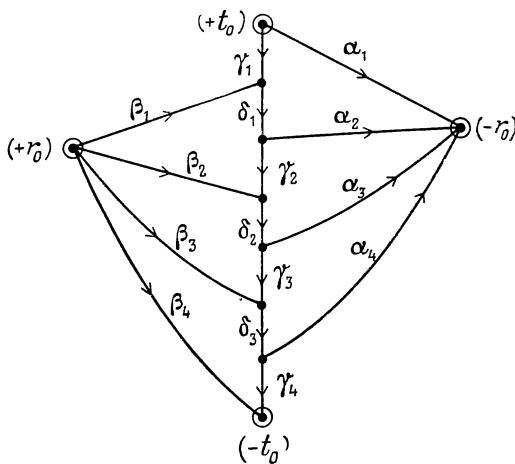
Будем в течение промежутка времени от 1 до n производить куплю и продажу товара так, чтобы в конце количество его оказалось равным первоначальному t_0 . При этом ищутся (для каждого i):

α_i — количество товара, проданное во время i ;
 β_i — количество товара, приобретенное во время i ;

γ_i — количество хранящегося товара после продажи старого;
 δ_i — количество хранящегося товара после покупки нового.



Р и с. 1.



Р и с. 2.

Задача состоит в максимизации полной прибыли $\sum_{i=1}^n (p_i \alpha_i - q_i \beta_i - r_i \gamma_i)$ при условиях

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_i - \alpha_{i+1} - \gamma_{i+1} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \\ -\alpha_1 - \gamma_1 = -t_0; \\ \gamma_i + \beta_i - \delta_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \\ \gamma_n + \beta_n = t_n; \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 0 \leq \alpha_i \leq \infty; \\ 0 \leq \beta_i \leq \infty; \\ 0 \leq \gamma_i \leq \infty; \\ 0 \leq \delta_i \leq k. \end{array}$$

Эта задача сразу сводится к задаче распределения товара по транспортной сети (пример 4); при $n=4$ соответствующая сеть и потоки по ее дугам показаны на рис. 1; если товар нормирован, то полное количество, которое можно купить во время n , есть данное число r_0 , и мы получаем граф, изображенный на рис. 2.

Венгерский метод

Как читатель смог уже увидеть из условий (1) и (2), транспортная задача является частным случаем „линейной программы“; как таковую, ее можно решить при помощи симплекс-метода (Данциг [3]), а теория графов дает заметные упрощения обычного процесса (см. [6]). Мы изложим здесь вкратце совсем иной метод, непосредственно опирающийся на теорию транспортных сетей (гл. 8), который оказывается значительно эффективнее симплекс-метода. Этот метод, развитый вначале Куном [10], был затем обобщен Фордом и Фалкерсоном [5], Фладом [4] и др.

§ 1. Здесь нет необходимости обращаться к аналитическим методам, и мы, не уменьшая надежности, останемся на более интуитивной точке зрения теории графов.

Рассмотрим некоторую транспортную сеть G с двумя непересекающимися множествами вершин $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Соединим вход x_0 с каждой из вершин x_i дугой пропускной способности $c(x_0, x_i) = a_i$; каждую вершину y_j соединим с выходом z дугой пропускной способности $c(y_j, z) = b_j$; наконец, соединим каждую вершину x_i с каждой вершиной y_j дугой пропускной способности $c(x_i, y_j) = c_{ij}$. Ищется поток $\varphi(u)$, насыщающий выходные дуги, т. е. такой, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi(u) \leq c(u) & (u \in U), \\ \varphi(x_0, x_i) &= a_i & (i \leq m), \\ \varphi(y_j, z) &= b_j & (j \leq n). \end{aligned}$$

Работа этого потока, по определению, равна

$$d[\varphi] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij}^i \varphi(x_i, y_j).$$

Общая транспортная задача как она была определена выше, состоит в *нахождении потока φ , насыщающего выходные дуги и производящего наибольшую работу*.

Наряду с этой основной задачей мы рассмотрим двойственную задачу, которая ставится следующим образом: назовем *бюджетом* функцию $\gamma(u) \geq 0$, заданную на дугах транспортной сети G и такую, что

$$(2) \quad \gamma(x_0, x_i) + \gamma(x_i, y_j) + \gamma(y_j, z) \geq d_{ij}^i \quad (i \leq m, j \leq n).$$

$\gamma(u)$ можно толковать как денежную сумму, которую надо уплатить за все транспортные средства при перевозке по дуге u ; транспорт, курсирующий по пути $[x_0, x_i, y_j, z]$, оценивается наибольшей полной стоимостью работы d_j^i , которая при этом будет совершена.

Положим для краткости

$$\gamma(x_0, x_i) = \alpha_i,$$

$$\gamma(y_j, z) = \beta_j,$$

$$\gamma(x_i, y_j) = \gamma_j^i.$$

Способность бюджета γ определим как

$$c[\gamma] = \sum_{i=1}^m \alpha_i \alpha_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_j^i \gamma_j^i + \sum_{j=1}^n \beta_j \beta_j.$$

Поставим задачу найти бюджет γ с наименьшей способностью.

Л е м м а. Для любого бюджета γ и любого потока φ

$$d[\varphi] \leq c[\gamma].$$

В самом деле, можно написать

$$d_j^i \varphi_j^i \leq \alpha_i \varphi_j^i + \gamma_j^i \varphi_j^i + \beta_j \varphi_j^i,$$

откуда

$$\begin{aligned} d[\varphi] &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_j^i \varphi_j^i \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^n \varphi_j^i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \gamma_j^i \varphi_j^i + \\ &+ \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i=1}^m \varphi_j^i \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i \alpha_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_j^i \gamma_j^i + \sum_{j=1}^n \beta_j \beta_j = c[\gamma], \end{aligned}$$

что и требовалось.

В силу этой леммы, если существуют поток φ и бюджет γ , удовлетворяющие условию $d[\varphi] = c[\gamma]$, то φ — искомый поток.

§ 2. Для упрощения выкладок допустим, что все c_j^i бесконечны; тогда все γ_j^i равны нулю. Двойственная задача состоит теперь в нахождении таких чисел $\alpha_i \geq 0$ и $\beta_j \geq 0$, что

$$\alpha_i + \beta_j \geq d_j^i \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n).$$

Наряду с основной и двойственной задачами рассмотрим вспомогательную задачу, которая ставится следующим образом: каждому бюджету γ отнесем вспомогательную транспортную сеть \bar{G}_γ , получаемую из G удалением тех дуг (x_i, y_j) , для которых

$$\alpha_i + \beta_j > d_j^i.$$

Требуется теперь найти наибольший поток по транспортной сети \bar{G}_γ .

Теорема 1. Если при бюджете γ граф \bar{G}_γ допускает поток $\bar{\varphi}$, насыщающий выходные дуги, то γ — бюджет с наименьшей способностью, а $\bar{\varphi}$ — поток по G , производящий наибольшую работу.

Очевидно, $\bar{\varphi}$ есть поток по сети G , и он насыщает выходные дуги G . Его работа равна

$$d[\bar{\varphi}] = \sum_{\alpha_i + \beta_j = d_j^i} d_j^i \bar{\varphi}_j^i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_i + \beta_j) \bar{\varphi}_j^i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j \beta_j = c[\gamma].$$

Значит, в силу леммы $\bar{\varphi}$ является потоком по G , производящим наибольшую работу, а γ — бюджетом с наименьшей способностью.

Теорема 2. Если при бюджете γ сеть \bar{G}_γ не допускает потока, насыщающего ее выходные дуги, то можно найти новый бюджет γ' со способностью $c[\gamma'] < c[\gamma]$.

Действительно, пусть $\bar{\varphi}$ — наибольший поток, не насыщающий выходных дуг сети \bar{G}_γ ; в силу теоремы Форда и Фалкерсона значение этого потока равно пропускной способности того разреза U_A^- , который он насыщает. Пусть

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s, z\}.$$

Поскольку U_A^- — разрез с наименьшей пропускной способностью, он не содержит дуг пропускной способности ∞ ; значит, из $i > r$, $j \leq s$ следует, что (x_i, y_j) не является дугой графа \bar{G}_γ , т. е. что

$$\alpha_i + \beta_j > d_j^i.$$

Далее, можно считать, что все $\alpha_i > 0$ или все $\beta_j > 0$, ибо в противном случае для некоторой пары (i, j) имело бы место равенство

$$d_j^i = \alpha_i + \beta_j = 0.$$

Пусть, например,

$$\alpha_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Положим

$$\alpha'_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{при } i \leq r, \\ \alpha_i - 1 & \text{при } i > r; \end{cases}$$

$$\beta'_j = \begin{cases} \beta_j & \text{при } j \leq s, \\ \beta_j + 1 & \text{при } j > s. \end{cases}$$

Покажем, что величины α'_i и β'_j образуют бюджет γ' ; если $i > r$, $j \leq s$, то $\alpha_i + \beta_j > d_j^i$, значит,

$$\alpha'_i + \beta'_j \geq d_j^i.$$

Кроме того, если $i > r$, то $\alpha_i > 0$, поэтому

$$\alpha'_i \geq 0.$$

Способность нового бюджета равна

$$c[\gamma'] = \sum_{i=1}^m a_i \alpha'_i + \sum_{j=1}^n b_j \beta'_j = c[\gamma] - \sum_{i=r+1}^m a_i + \sum_{j=s+1}^n b_j.$$

Отсюда

$$c[\gamma] - c[\gamma'] = \sum_{i=1}^m a_i - \left(\sum_{i=1}^r a_i + \sum_{j=s+1}^n b_j \right) = \sum_{i=1}^m a_i - \bar{\varphi}_z > 0,$$

т. е. способность нового бюджета меньше, чем первоначального.

Ч. И. Т. Д

Алгоритм для нахождения потока, производящего наибольшую работу, можно теперь описать так: отправляясь от бюджета γ , определяемого условиями

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \max_j d_j^i, \\ \beta_j &= \max_i (d_j^i - \alpha_i), \\ \gamma_j^i &= 0, \end{aligned}$$

ищем наибольший поток по сети \bar{G}_γ . Если этот поток не насыщает выходных дуг, то определяем новый бюджет γ' и повторяем все сначала; если же этот поток насыщает выходные дуги, то он и дает решение задачи.

§ 3. Если не предполагать более, что все c_j^i бесконечны, то надо будет учитывать числа γ_j^i и всегда можно считать

$$\gamma_j^i = \max \{0, d_j^i - \alpha_i - \beta_j\}.$$

Надо поэтому рассмотреть три случая:

- 1° $\gamma_j^i = 0, \quad d_j^i = \alpha_i + \beta_j \quad (m. e. (i, j) \in P);$
- 2° $\gamma_j^i = 0, \quad d_j^i < \alpha_i + \beta_j \quad (m. e. (i, j) \in Q);$
- 3° $\gamma_j^i > 0, \quad d_j^i = \alpha_i + \beta_j + \gamma_j^i \quad (m. e. (i, j) \in R).$

Определим, как прежде, транспортную сеть \bar{G}_γ с теми же дугами, что и G , но обладающими теперь пропускными способностями:

$$\begin{aligned} \bar{a}_i &= a_i - \sum_{j/(i, j) \in R} c_j^i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \bar{b}_j &= b_j - \sum_{i/(i, j) \in R} c_j^i \quad (j = 1, 2, \dots, n), \\ \bar{c}_j^i &= \begin{cases} c_j^i & \text{при } (i, j) \in P, \\ 0 & \text{при } (i, j) \in Q \cup R. \end{cases} \end{aligned}$$

Теорема 1'. Если при бюджете γ сеть \bar{G}_γ допускает поток $\bar{\varphi}$, насыщающий все выходные дуги, то γ — бюджет с наименьшей способностью; кроме того, для сети G поток φ , производящий наибольшую работу, определится следующим образом:

$$\varphi = \begin{cases} \bar{\varphi}_j^i & \text{при } (i, j) \in P \cup Q, \\ c_j^i & \text{при } (i, j) \in R. \end{cases}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} d[\varphi] &= \sum_{(i, j) \in P \cup Q} d_j^i \bar{\varphi}_j^i + \sum_{(i, j) \in R} d_j^i c_j^i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_i + \beta_j) \bar{\varphi}_j^i + \sum_{(i, j) \in R} d_j^i c_j^i = \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{a}_i + \sum_{j=1}^n \beta_j \bar{b}_j + \sum_{(i, j) \in R} d_j^i c_j^i = c[\gamma] - \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j/(i, j) \in R} c_j^i - \\ &- \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i/(i, j) \in R} c_j^i - \sum_{(i, j) \in R} \gamma_j^i c_j^i + \sum_{(i, j) \in R} (\alpha_i + \beta_j + \gamma_j^i) c_j^i = c[\gamma]. \end{aligned}$$

Значит, $d[\varphi] = c[\gamma]$, и в силу леммы φ — искомый поток.

Теорема 2'. Если при бюджете γ сеть \bar{G}_γ не допускает потока $\bar{\varphi}$, насыщающего выходные дуги, то можно найти новый бюджет γ' со способностью $c[\gamma'] < c[\gamma]$.

Действительно, пусть $\bar{\varphi}$ — наибольший поток по \bar{G}_γ ; согласно предположению, он не насыщает выходных дуг. Рассмотрим такое множество

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s, z\},$$

что

$$c(U_A^-) = \bar{\varphi}_z < \sum_{i=1}^m \bar{a}_i.$$

Можно считать, как и в теореме 2, что все $\alpha_i > 0$. Положим теперь

$$\alpha'_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{при } i \leq r, \\ \alpha_i - 1 & \text{при } i > r; \end{cases}$$

$$\beta'_j = \begin{cases} \beta_j & \text{при } j \leq s, \\ \beta_j + 1 & \text{при } j > s; \end{cases}$$

$$\gamma_j^i = \begin{cases} \gamma_j^i - 1 & \text{при } i \leq r, j > s, (i, j) \in R, \\ \gamma_j^i + 1 & \text{при } i > r, j \leq s, (i, j) \in R \cup P, \\ \gamma_j^i & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Сперва покажем, что новые числа опять определяют некоторый бюджет; имеем $\alpha'_i \geq 0$, $\beta'_j \geq 0$, $\gamma_j^i \geq 0$. Чтобы проверить, что значение $\alpha_i + \beta_j + \gamma_j^i - d_j^i$ остается ≥ 0 , изучим с помощью таблицы 1 изменение Δ этой величины.

Таблица 1

	$\begin{smallmatrix} P \\ i \leq r \\ j \leq s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} P \\ i \leq r \\ j > s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} P \\ i > r \\ j \leq s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} P \\ i > r \\ j > s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} Q \\ i \leq r \\ j \leq s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} Q \\ i \leq r \\ j > s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} Q \\ i > r \\ j \leq s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} Q \\ i > r \\ j > s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} R \\ i \leq r \\ j \leq s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} R \\ i \leq r \\ j > s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} R \\ i > r \\ j \leq s \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} R \\ i > r \\ j > s \end{smallmatrix}$
$\Delta \alpha_i$	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1
$\Delta \beta_j$	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1
$\Delta \gamma_j^i$	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	-1	+1	0
$\Delta =$	0	+1	0	0	0	+1	-1	0	0	0	0	0

Единственный случай, когда $\Delta = -1$, нас не затруднит, ибо при $(i, j) \in Q$ имеем

$$\alpha_i + \beta_j + \gamma_j^i - d_j^i > 0.$$

Теперь убедимся, что способность бюджета уменьшилась; именно,

$$\begin{aligned} c[\gamma'] &= \sum_i a_i \alpha'_i + \sum_j b_j \beta'_j + \sum_{i,j} c_j^i \gamma_j'^i = \\ &= c[\gamma] - \sum_{i>r} a_i + \sum_{j>s} b_j - \sum_{\substack{i \leq r \\ j > s}} c_j^i + \sum_{\substack{i > r \\ j \leq s}} c_j^i + \sum_{\substack{i > r \\ j \leq s}} c_j^i, \end{aligned}$$

или, окончательно,

$$c[\gamma'] - c[\gamma] = - \sum_{i>r} \bar{a}_i + \sum_{j>s} \bar{b}_j + \sum_{\substack{i > r \\ j \leq s}} \bar{c}_j^i = - \sum_i \bar{a}_i + \bar{c}(U\bar{A}) < 0.$$

Теорема полностью доказана.

Замечание. Если даны числа $c_j^{\eta i} \geq c_j'^i \geq 0$, то можно обобщить задачу, налагая условия:

$$c_j'^i \leq \varphi_j^i \leq c_j^{\eta i} \quad (i \leq m, j \leq n).$$

Мы приходим к классической транспортной задаче для вспомогательной сети \bar{G} , определенной в главе 8 (стр. 93); во всех случаях процесс, который следует осуществлять, будет тем же, что и здесь (стр. 258).

III. Об использовании понятия потенциала в транспортных сетях

Зададим связный граф $G = (X, U)$ и для каждой вершины $x \in X$ зададим целое число $q(x)$ (оно может быть и отрицательным), которое назовем *избытком* в вершине x . Будем говорить, что функция $\varphi(u)$, определенная на всех дугах $u \in U$, представляет собой *поток, совместимый с избытками* $q(x)$, если

$$1^\circ \quad \varphi(u) \geq 0 \quad (u \in U),$$

$$2^\circ \quad \sum_{u \in U_x^+} \varphi(u) - \sum_{u \in U_x^-} \varphi(u) = q(x) \quad (x \in X).$$

(В транспортных сетях, рассмотренных в главе 8, избытки равны нулю везде, кроме входа x_0 и выхода z , где они неизвестны.)

Если $\mu = (u_1, u_2, \dots)$ — некоторый цикл графа, то обозначим через $V'(\mu)$ множество дуг μ , направленных в сторону обхода цикла, а через $V''(\mu)$ — множество дуг μ противоположного направления. Функция $\pi(u)$, определенная на всех дугах $u \in U$, называется *разностью потенциалов*, если для любого цикла μ имеет место

$$(1) \quad \sum_{u \in V'(\mu)} \pi(u) - \sum_{u \in V''(\mu)} \pi(u) = 0.$$

Замечание 1. Если соотношение (1) выполнено для всех циклов некоторой фундаментальной базы, то оно выполняется и для любого цикла графа.

Замечание 2. Если существует разность потенциалов $\pi(u)$, то на X можно определить такую функцию $p(x)$, что для каждой дуги $u = (x, y)$ будет

$$(2) \quad \pi(u) = \pi(x, y) = p(x) - p(y).$$

В самом деле, достаточно в произвольно выбранной вершине $x_0 \in X$ положить $p(x_0) = 0$, затем определить значение $p(x)$ для всех вершин x , смежных с x_0 , потом для вершин, смежных с рассмотренными, и т. д. Так как граф связан, $p(x)$ определится шаг за шагом для всего X . В силу (1) полученное значение в каждой вершине x будет единственным,

Обратно, если $p(x)$ — функция, определенная на X , то, очевидно, $\pi(x, y) = p(x) - p(y)$ есть разность потенциалов. Функция $p(x)$ называется *потенциальной функцией* графа.

В большинстве задач, которых мы здесь коснемся, задается функция $r(u)$, определенная на каждой из дуг $u \in U$ и называемая *сопротивлением* этой дуги; функция $c(u) = \frac{1}{r(u)}$, по определению, есть *проводимость* дуги u .

Задача Дирихле. В данном графе определить поток φ , совместимый с заданными избытками и такой, чтобы $\pi(u) = r(u)\varphi(u)$ являлась разностью потенциалов.

Задача Дирихле — Неймана. В данном графе определить поток φ , для которого $\pi(u) = r(u)\varphi(u)$ есть разность потенциалов, если в некоторых вершинах x заданы избытки $q(x)$, а в остальных вершинах — потенциал $p(x)$.

Эти задачи первоначально возникли при изучении электрических цепей, но их можно поставить также во многих областях чистой математики или в исследовании операций. Поэтому мы считаем нужным привести здесь несколько простых и легко приложимых результатов.

Пример 1. Разбиение прямоугольника на квадраты. Данный прямоугольник требуется разбить на n квадратов, из которых никакие

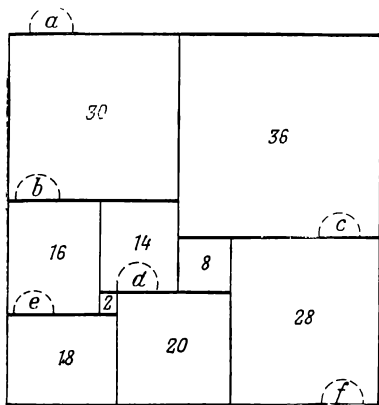
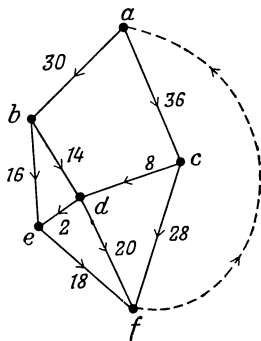


Рис. 1.



два не обладают одинаковым размером. Прямоугольник, допускающий такое разбиение, назовем *совершенным прямоугольником порядка n* . Долгое время считалось, что совершенных прямоугольников не существует; первый пример был построен в 1925 г. Мореном

(Морон), а общая теория намечена Спрагом [6] и далее Бруксом, Смитом, Стоуном и Таттом [2].

Заметим, что с каждым совершенным прямоугольником можно сопоставить, как показано на рис. 1 и 2, некоторый граф G (вершинами которого служат горизонтальные стороны квадратов). Этот граф обладает замечательными свойствами: он плоский, связный и не имеет точек сочленения; кроме того, на G существуют поток $\varphi(u)$ и разность потенциалов $\pi(u) = \varphi(u)$, причем значения φ на разных дугах различны.

Нахождение совершенного прямоугольника порядка n сводится к отысканию в полном графе с k вершинами такого частичного

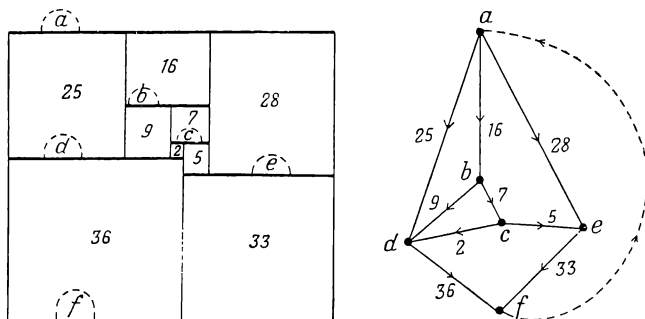


Рис. 2.

графа, для которого задача Дирихле с сопротивлением $r(u) \equiv 1$ имеет решение с попарно различными значениями координат.

При $n < 9$ совершенных прямоугольников порядка n не существует; при $n = 9$ имеется ровно два таких прямоугольника; они изображены на рис. 1 и 2.

Пример 2 (экономика). Рассмотрим следующую упрощенную экономическую модель: пусть точки изображают промышленные предприятия x_1, x_2, \dots, x_k и виды продукции y_1, y_2, \dots, y_l ; если предприятие x_i использует продукты y_1 и y_2 для производства продуктов y_3 и y_4 , то чертим дуги:

$$(y_1, x_i), (y_2, x_i), (x_i, y_3), (x_i, y_4).$$

Если $(y_j, x_i) \in U$, то проводимость этой дуги будет $c_j^i < 0$, где $|c_j^i|$ — количество продукта y_j , потребляемое предприятием x_i , когда интенсивность работы последнего равна единице; если же $(x_i, y_j) \in U$, то проводимость будет $c_j^i > 0$, где c_j^i — количество продукта y_j , производимого предприятием x_i при единичной интенсивности работы.

Для каждого j исходный запас продукта y_j равен α_j , а количество этого продукта, которое требуется получить, равно β_j ;

с какой интенсивностью должны работать предприятия, чтобы добиться этого результата?

Положим

$$\begin{cases} q(y_j) = \alpha_j - \beta_j, \\ p(y_j) = 0. \end{cases}$$

Если существует поток φ , удовлетворяющий этим условиям при проводимостях c_j^i , то $p(x_i)$ выражает искомую интенсивность для x_i . Если $u = (y_j, x_i) \in U$, то количество продукта y_j , потребляемого предприятием x_i , будет

$$\varphi(y_j, x_i) = p(x_i)(-c_j^i) = c_j^i [p(y_j) - p(x_i)].$$

Если $(x_i, y_j) \in U$, то количество продукта y_j , изготовляемого предприятием x_i , будет

$$\varphi(x_i, y_j) = p(x_i)c_j^i = c_j^i [p(x_i) - p(y_j)].$$

Мы пришли, таким образом, к задаче Дирихле — Неймана.

Задача Дирихле с сопротивлениями $r(u) \geq 0$

Положим для простоты $r(u_j) = r_j$, $c(u_j) = c_j$, $p(x_i) = p_i$, $q(x_i) = q_i$, $\varphi(u_j) = \varphi_j$, $\pi(u_j) = \pi_j$; рассмотрим векторы $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ и $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$.

Будем пользоваться матрицей инцидентий $S = (s_j^i)$ для дуг, где

$$s_j^i = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i \text{ не является граничной точкой дуги } u_j; \\ +1, & \text{если } x_i \text{ есть начало дуги } u_j; \\ -1, & \text{если } x_i \text{ есть конец дуги } u_j. \end{cases}$$

Мы используем также диагональную матрицу $C = (c_j^i)$, где

$$c_j^i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ c_j & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Если $u_j = (x_1, x_2)$ — дуга графа, то можно написать

$$\pi_j = \pi(u_j) = p(x_1) - p(x_2) = \sum_i s_j^i p_i = \langle \mathbf{s}_j, \mathbf{p} \rangle,$$

$$q_i = q(x_i) = \sum_j s_j^i \varphi(u_j) = \langle \mathbf{s}^i, \boldsymbol{\varphi} \rangle.$$

Поэтому

$$(1) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\pi} = S^* \mathbf{p}, \\ \mathbf{q} = S \boldsymbol{\varphi}, \\ \boldsymbol{\varphi} = C \boldsymbol{\pi}. \end{cases}$$

Теорема 1. *Задача Дирихле с сопротивлениями $r(u) \geq 0$ имеет решение φ , притом единственное.*

1° *Единственность.* Пусть φ и φ' — два потока, удовлетворяющие условиям задачи; потоку φ' соответствуют избыток q' , разность потенциалов π' и потенциальная функция p' ; имеем $q' = q$, откуда

$$\begin{aligned} \sum_j c_j (\pi_j - \pi'_j)^2 &= \sum_j (c_j \pi_j - c_j \pi'_j) (\pi_j - \pi'_j) = \sum_j (\varphi_j - \varphi'_j) \left[\sum_i s_j^i (p_i - p'_i) \right] = \\ &= \sum_i (p_i - p'_i) \left[\sum_j s_j^i (\varphi_j - \varphi'_j) \right] = \sum_i (p_i - p'_i) (q_i - q'_i) = 0. \end{aligned}$$

Так как $c_j > 0$ при всех j , то $\pi = \pi'$ и, следовательно,

$$\varphi = \varphi'.$$

2° *Существование.* Задача состоит в следующем: дан вектор $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$; ищется такой вектор $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, чтобы

$$q = S\varphi = SC\pi = SCS^*p.$$

Эта система n линейных уравнений с n неизвестными такова, что ее решение, если оно существует, единственно; значит, разрешимость имеет место тогда и только тогда, когда

$$\text{Det}(SCS^*) \neq 0.$$

Последнее же соотношение непосредственно вытекает из теоремы Ольги Таусски об определителях [7]¹⁾.

В задаче Дирихле — Неймана с избытками $q(x)$, заданными на множестве $A \subset X$, и потенциалами $p(x)$, заданными на $X \setminus A$, единственность доказывается точно так же, как выше; что же касается существования, то оно было доказано Даффином [3] другими методами.

Теорема 2. *Пусть Φ — множество потоков φ , совместимых с избытками q_1, q_2, \dots, q_n , и пусть $r_1, r_2, \dots, r_m \geq 0$; поток $\varphi \in \Phi$, для которого $\sum r_j (\varphi_j)^2$ достигает своего наименьшего значения, — единственный и представляет собой решение задачи Дирихле (о которой идет речь в теореме 1).*

Обозначим через φ решение задачи Дирихле, через φ' — произвольный поток из Φ и положим $\varphi'(u) = \varphi(u) + \varepsilon(u)$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_j r_j (\varphi'_j)^2 &= \sum_j (r_j \varphi_j^2 + 2r_j \varphi_j \varepsilon_j + r_j \varepsilon_j^2) = \sum_j r_j \varphi_j (\varphi_j + 2\varepsilon_j) + \\ &+ \sum_j r_j (\varepsilon_j)^2 = \sum_j \pi_j \varphi_j + 2 \sum_j \pi_j (\varphi'_j - \varphi_j) + \sum_j r_j (\varepsilon_j)^2. \end{aligned}$$

¹⁾ Эффективное решение системы является классическим в электротехнике, и здесь можно успешно применять теорию графов в сочетании с методом Крона (см., например, [8]). (Теорема Таусски имеется также в книге Пароди М., Локализация характеристических чисел матрицы и ее применения, ИЛ, Москва, 1960, гл. II, § 1. — Прим. перев.)

Но

$$\sum_j \pi_j \varphi_j = \sum_j \varphi_j \left(\sum_i s_j^i p_i \right) = \sum_i p_i q_i.$$

Точно так же

$$\sum_j \pi_j \varphi'_j = \sum_i p_i q_i.$$

Отсюда, окончательно,

$$\sum_j r_j (\varphi'_j)^2 = \sum_i p_i q_i + \sum_j r_j (\varepsilon_j)^2.$$

Из этой формулы видно, что наименьшее значение достигается при $\varepsilon = 0$, т. е. при $\varphi' = \varphi$.

Задача Купманса

Рассмотрим множество портов x_1, x_2, \dots, x_n и множество линий морских перевозок u_1, u_2, \dots, u_m . Пусть $d_j = d(u_j)$ — время, затрачиваемое грузовым судном на холостой рейс по линии u_j , и пусть $q_i = q(x_i)$ — средний избыток пустых судов в порту x_i ; $d_i, q_i > 0$, порт x_i ввозит больше, чем вывозит, и излишек надо распределить по порожним кораблям, идущим в другие порты. Пусть $\varphi_j = \varphi(u_j)$ — количество пустых судов, которое предполагалось отправить по линии u_j . Задача состоит в определении потока φ , совместимого с избытками q_i и минимизирующего полную стоимость перевозок, равную (с точностью до постоянного множителя)

$$\sum_{j=1}^m d_j \varphi(u_j) = \langle \mathbf{d}, \varphi \rangle.$$

Поставленная задача относится к общей категории транспортных задач, для которых выше был дан алгоритм (см. Добавление II, пример 4). Тем не менее применение потенциальной функции и аналогия с электрическими сетями позволяют получить несколько новую процедуру.

Итак, пусть U — множество всех рассматриваемых линий морских перевозок (с указанием направлений), а (X, U) — соответствующий граф.

Мы скажем, что частичный граф (X, V) является *оптимальной опорой*, если существует поток φ , совместимый с избытками q_i , минимизирующий $\langle \mathbf{d}, \varphi \rangle$ и такой, что

$$\begin{aligned} \varphi(u) &> 0 \quad \text{при} \quad u \in V, \\ \varphi(u) &= 0 \quad \text{при} \quad u \in U \setminus V, \end{aligned}$$

Теорема 3. Если (X, V) — оптимальная опора, то для каждой вершины $x \in X$ существует такое число $p(x)$, что

$$(1) \quad \begin{cases} d(x, y) \geq |p(y) - p(x)| & \text{при } (x, y) \in U, \\ d(x, y) = p(y) - p(x) & \text{при } (x, y) \in V. \end{cases}$$

Пусть (X, V) — оптимальная опора, φ — соответствующий оптимальный поток. Граф (X, V) можно считать связным (в противном случае мы рассмотрим каждую компоненту отдельно). Выберем в этой опоре произвольную вершину x_0 и положим $p(x_0) = 0$; при $(x, x_0) \in V$ положим

$$p(x) = p(x_0) - d(x, x_0);$$

при $(x_0, y) \in V$ положим

$$p(y) = p(x_0) + d(x_0, y).$$

Всякий раз, определив p в некоторой вершине графа, мы можем определить эту функцию во всех смежных вершинах, где она еще не определена, и, таким образом, шаг за шагом определить p на всем X .

Допустим, что существует дуга $u = (x, y) \in U$, для которой

$$d(x, y) < p(y) - p(x),$$

и покажем, что это допущение приводит к противоречию. Дуга (x, y) входит в состав некоторого проходящего через x_0 цикла вида

$$\mu = [x_0, x_1, \dots, x_{l-1} = x, x_l = y, \dots, x_k = x_0],$$

где

$$(x_i, x_{i-1}) \text{ или } (x_{i-1}, x_i) \in V \quad (i \neq l, i \leq k).$$

Обозначим через $V'(\mu)$ множество дуг μ , ориентированных в направлении обхода, через $V''(\mu)$ — множество дуг μ , ориентированных в противоположном направлении, и определим поток ψ следующим образом:

$$\psi(u) = \varphi(u) + 1 \quad \text{при } u \in V'(\mu),$$

$$\psi(u) = \varphi(u) - 1 \quad \text{при } u \in V''(\mu),$$

$$\psi(u) = \varphi(u) \quad \text{при } u \notin V'(\mu), u \notin V''(\mu).$$

Этот поток ψ заведомо совместим с избытками и более выгоден, чем φ , ибо экономия стоимости составляет

$$\begin{aligned} \sum_{u \in V''(\mu)} d(u) - \sum_{u \in V'(\mu)} d(u) &= -d(x, y) + p(x_0) - p(x_1) + \\ &+ p(x_1) - p(x_2) + \dots = -d(x, y) + p(y) - p(x) + 0 > 0. \end{aligned}$$

Но это противоречит оптимальности φ .

Таким же способом доказывается, что не существует дуги $v = (x, y) \in V$, для которой

$$d(x, y) > p(y) - p(x).$$

Следовательно, имеет место (1).

Теорема 4. Если (X, V) — опора¹⁾ некоторого потока φ , совместимого с заданными избытками, и если существуют числа $p(x)$, удовлетворяющие условию (1), то поток φ — оптимальный.

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{u \in U} d(u) \varphi(u) &= \sum_{u_j \in V} d(u_j) \varphi(u_j) = - \sum_{u_j \in V} \varphi(u_j) \left(\sum_{i=1}^n s_j^i p_i \right) = \\ &= - \sum_{i=1}^n p_i \left(\sum_{j=1}^m s_j^i \varphi_j \right) = - \sum_{i=1}^n p_i q_i. \end{aligned}$$

Для произвольного потока ψ , совместимого с избытками, имеем

$$\sum_{u \in U} d(u) \psi(u) \geq - \sum_{j=1}^m \psi_j \left(\sum_{i=1}^n s_j^i p_i \right) = - \sum_{i=1}^n p_i \left(\sum_{j=1}^m s_j^i \psi_j \right) = - \sum_{i=1}^n p_i q_i.$$

Поэтому φ является оптимальным потоком, а (X, V) — оптимальной опорой.

На этих результатах основан весьма общий метод решения задач рассмотренного типа. Задавшись возможно более правдоподобной антисимметрической транспортной сетью (X, V) , выясняем, является ли $\pi(x, y) = -d(x, y)$ разностью потенциалов для этой сети. В произвольно выбранной вершине $x_0 \in X$ полагаем $p(x_0) = 0$; с помощью итерационного процесса определяем значение $p(x)$ в каждой вершине следующим образом: если в x_1 значение p уже определено, то в вершине y (еще не имеющей значения) полагаем

$$\begin{aligned} p(y) &= p(x_1) + d(x_1, y) \quad \text{при } (x_1, y) \in V, \\ p(y) &= p(x_1) - d(x_1, y) \quad \text{при } (y, x_1) \in V. \end{aligned}$$

Если существует такая дуга $(x, y) \in V$, что $p(y) - p(x) < d(x, y)$, то удаляем ее из нашей транспортной сети. Если же имеется дуга $(x, y) \in U$, для которой $p(y) - p(x) > d(x, y)$, то улучшаем конфигурацию сети по способу „кругового потока“ (см. теорему 3). Таким образом рано или поздно получим

$$\begin{aligned} p(y) - p(x) &= d(x, y) \quad \text{при } (x, y) \in V, \\ p(y) - p(x) &< d(x, y) \quad \text{при } (x, y) \in U \setminus V. \end{aligned}$$

Новая транспортная сеть (X, V) , как легко проверить, допускает поток, совместимый с избытками, а общий способ нахождения такого потока был дан выше (гл. 16, стр. 168).

¹⁾ Определение опоры естественным образом содержится в определении оптимальной опоры, данном выше. — *Прим. перев.*

Следуя Купмансу и Рейтеру [4], применим в качестве примера этот алгоритм к морским путям между портами, зарегистрированным в 1913 году. Получается схема, изображенная на рис. 3.

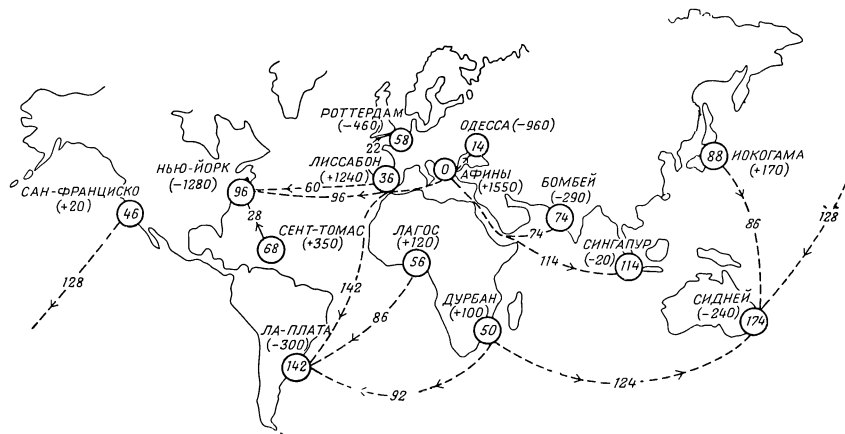


Рис. 3. Граф оптимальных холостых рейсов судов в 1913 г.

— на пунктирных линиях: продолжительность $d(x, y)$ рейсов в десятых долях месяца; $\pi(x, y) = -d(x, y)$ представляет собой разность потенциалов;
 — обведено кружком: значение $p(x)$ для порта x ;
 — в скобках: ежемесячный избыток порожних транспортных средств $q(x)$ в миллионах тонн.

(Эта карта заимствована из [4] с разрешения авторов).

Здесь транспортная сеть является деревом. Она содержит в силу теоремы 2 (гл. 16) висячую дугу, а так как поток по такой дуге определяется однозначно, то ее можно удалить (соответственно исправив избытки в ее граничных точках); то же самое сделаем с полученным деревом. Таким путем шаг за шагом находим:

φ (Иокогама, Сидней) = 170
 φ (Сан-Франциско, Сидней) = 20
 φ (Дурбан, Сидней) = 50
 φ (Дурбан, Ла-Плата) = 50
 φ (Лагос, Ла-Плата) = 120
 φ (Афины, Ла-Плата) = 130
 φ (Афины, Одесса) = 960
 φ (Афины, Бомбей) = 290
 φ (Афины, Сингапур) = 20
 φ (Афины, Нью-Йорк) = 150
 φ (Сент-Томас, Нью-Йорк) = 350
 φ (Лиссабон, Нью-Йорк) = 780
 φ (Лиссабон, Роттердам) = 460

q (Сидней) = $-240 + 170 = -70$
 q (Сидней) = $-70 + 20 = -50$
 q (Дурбан) = $100 - 50 = +50$
 q (Ла-Плата) = $-300 + 50 = -250$
 q (Ла-Плата) = $-250 + 120 = -130$
 q (Афины) = $1550 - 130 = +1420$
 q (Афины) = $1420 - 960 = +460$
 q (Афины) = $460 - 290 = +170$
 q (Афины) = $170 - 20 = +150$
 q (Нью-Йорк) = $-1280 + 150 = -1130$
 q (Нью-Йорк) = $1130 - 350 = +780$
 q (Лиссабон) = $1240 - 780 = +460$
 q (Роттердам) = 0.

Следовательно, поток φ минимизирует стоимость порожнего транспорта; конечно, в задаче предполагается, что все суда имеют один и тот же тоннаж.

IV. Нерешенные задачи и недоказанные предположения

Нижеследующий список содержит нерешенные проблемы, которые представляются нам особо важными.

1. Глава 4. Задача о пятнадцати девушках (стр. 44) приводит к другой задаче, не решенной до сих пор, несмотря на усилия Сильвестра, Кэли и многих современных алгебраистов: замечая, что число троек равно $7 \times 5 \times 13$, Сильвестр поставил вопрос, можно ли водить воспитанниц на прогулки в течение 13 недель таким образом, чтобы:

1° каждую неделю всякие две девушки оказывались вместе один и только один раз;

2° в течение 13 недель всякие три девушки оказывались вместе один и только один раз.

Если рассмотреть граф G , вершинами которого служат 455 возможных троек и в котором ребро соединяет всякие две тройки, различающиеся не более чем одной девушкой, то задача сведется к доказательству того, что хроматическое число графа G равно в точности 13; оно никак не может быть больше 13: аналогичное утверждение было доказано в „задаче о 9 девушках“. С помощью алгоритма Гомори, нашего замечания на стр. 42 и современной вычислительной машины мы, без сомнения, можем подтвердить или опровергнуть предположение Сильвестра в том виде, как оно сформулировано выше.

Укажем, что задача о тройках важна в теории „планирования опытов“ и обобщается следующим образом: если $p \leq k \leq m$, то назовем *системой* $[k, p, m]$ семейство \mathcal{S} множеств, содержащихся в некотором множестве E из m элементов, имеющих по k элементов и таких, что всякое $P \subset E$, для которого $|P| = p$, содержится точно в одном $S \in \mathcal{S}$. Известно (Штейнер), что системы $[4, 3, m]$ существуют тогда и только тогда, когда

$$m \equiv 2 \text{ или } 4 \pmod{6}.$$

Известно также [Мур (E. H. Moore) и Рейсс (M. Reiss)], что системы $[3, 2, m]$ существуют тогда и только тогда, когда

$$m \equiv 1 \text{ или } 3 \pmod{6}.$$

Конструктивное доказательство без помощи индукции было недавно дано Ханани [1].

2. Можно показать, что если G — конечный граф, то числа $\bigvee^n \alpha(G^n)$ имеют конечную верхнюю грань; видимо, эта верхняя грань всегда получается предельным переходом, но предложение это не доказано. Также очень важно было бы показать, что если $\theta(G) \neq \alpha(G)$, то $\bigvee^{n+1} \alpha(G^{n+1}) - \bigvee^n \alpha(G^n) > 0$ для бесконечного множества значений n .

[Предположение, высказанное Шютценбергером (М. Р. Schützenberger).]

3. Какова емкость $\theta(G)$ графа G , изученного Шенноном (см. рис. 4—8)?

4. Глава 5. Обладает ли ядром сумма двух графов, каждый из которых имеет ядро? Это было доказано только для случая, когда каждый из графов-слагаемых допускает функцию Гранди¹⁾.

5. Глава 6. Если игры Ним (X_1, Γ_1) , (X_2, Γ_2) , ..., (X_n, Γ_n) допускают функции Гранди, то их произведение не всегда допускает функцию Гранди; однако можно доказать существование такой функции в случае, когда $\Gamma_i = \hat{\Gamma}_i$ (при $i = 1, 2, \dots, n$). Очень важно было бы улучшить это условие, мало пригодное для фактического использования.

6. Глава 10. Когда в простом графе задано наибольшее паросочетание W (образованное сильными ребрами), каждая чередующаяся цепь μ позволяет определить новое наибольшее паросочетание

$$W' = (W \setminus \mu) \cup (\mu \setminus W).$$

То же имеет место, когда μ является чередующимся циклом четной длины, и такую операцию мы называем „перемещением“. Важная и не решенная еще задача состоит в следующем: даны два наибольших паросочетания W и W' простого графа; можно ли получить W' из W конечным числом перемещений?

Если каждая вершина $x \in X$ смежна с каждой вершиной $y \in Y$, то справедлив более сильный результат, именно всегда можно получить W' из W надлежащими перемещениями в циклах длины 4; см. теорему 2 (гл. 9).

¹⁾ Самые простые примеры показывают, что сумма двух графов, имеющих ядро, может ядра не иметь. Это будет, например, выполняться для графов $G_1 = (X_1, \Gamma_1)$ и $G_2 = (X_2, \Gamma_2)$, где $X_1 = \{a, b, c, d\}$, $X_2 = \{e, f\}$, $\Gamma_1 a = \{b, d\}$, $\Gamma_1 b = \{c, d\}$, $\Gamma_1 c = \{a, d\}$, $\Gamma_1 d = \emptyset$, $\Gamma_2 e = f$, $\Gamma_2 f = \emptyset$. — Прим. ред.

7. Глава 11. Задача о книгах (см. стр. 123) не решена для случая трех издательских операций вместо двух.

8. Удивительно, что до сих пор мы не располагаем систематическим графическим алгоритмом для нахождения гамильтоновых контуров графа; единственный известный алгоритм является аналитическим и, видимо, может быть улучшен. Его можно описать следующим образом: каждому фактору отнесем числа ξ_j^i , где $\xi_j^i = 1$, если фактор содержит дугу (x_i, x_j) , и $\xi_j^i = 0$ в противном случае. Имеем тогда систему соотношений

$$(1) \quad \begin{cases} 0 \leq \xi_j^i \leq a_j^i, \\ \sum_{j=1}^n \xi_j^i = 1 \quad (i \leq n), \\ \sum_{i=1}^n \xi_j^i = 1 \quad (j \leq n). \end{cases}$$

Если решение системы (1), получаемое симплекс-методом, не образует гамильтонова контура, то оно содержит некоторый элементарный контур $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots]$, где $\{i_1, i_2, \dots\} = I$ — множество, состоящее менее чем из n индексов. Каждый гамильтонов контур удовлетворяет, кроме (1), условию

$$(2) \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \notin I} \xi_j^i \geq 1.$$

Ищем затем с помощью симплекс-метода решение системы (1) и (2), которое, очевидно, будет отличаться от уже найденного. Если новое решение опять не образует гамильтонова контура, то выводим, как выше, некоторое неравенство (3) и ищем симплекс-методом решение системы (1), (2), (3) и т. д. Таким способом мы через конечное число шагов получим гамильтонов контур (если он существует).

Можно ли провести эту идею в терминах транспортных сетей???

9. Глава 13. Пока не доказано следующее предложение: *если G — сильно связный граф с цикломатическим числом $\nu(G) > 1$, то существует такое множество трасс, что каждая вершина принадлежит по крайней мере двум из этих трасс.* Это предложение, очевидное для розеток, тривиально в случае $\nu(G) \geq n$, так что можно ограничиться рассмотрением случая $1 < \nu(G) < n$. Его важность обусловлена тем, что можно доказать неравенство

$$\delta(G) \geq \frac{2n}{\nu(G)} - 1.$$

[Предположение Брэттона (D. Bratton).]

10. Глава 14. Метод Уэя — Кендалла (Wei, Kendall) (стр. 149) заключается в составлении регулярной матрицы D с нулями на главной диагонали и в нахождении ее собственного вектора y , отвечающего наибольшему характеристическому числу λ ; координаты y позволяют тогда квалифицировать n игроков.

Рассмотрим теперь игру со стратегией (см. стр. 248), отвечающей матрице $\frac{1}{\lambda} I - D$, между игроком, выбирающим строку, и игроком, выбирающим столбец; Томпсон показал [2], что искомым вектор y выражает также оптимальную стратегию (необходимо единственную) игрока, выбирающего столбцы; доказательства требует следующее предположение: *оптимальная стратегия игрока, выбирающего столбцы, в игре $I - \frac{1}{n} D$ выражается той же классификацией, которую дает вектор y .*

(Предположение Томпсона.)

11. Глава 20. *Какова наибольшая связность графа с n вершинами и t ребрами?* Эта задача представляет такой же интерес, как и задача о нахождении наименьшего диаметра графа.

12. Глава 21. Теорема о четырех красках может оказаться следствием одного весьма общего предложения, которое удалось проверить для многочисленных семейств графов.

Пусть X — множество вершин связного неориентированного графа. Я буду условно говорить, что некоторое разбиение X является „вполне связным“, если каждый класс или объединение классов порождает связный подграф. Далее, я обозначу через Π_k множество разбиений X на k классов. Теорема, которую требуется доказать, формулируется следующим образом: *если при каждом разбиении $\pi \in \Pi_n$ существуют две смежные вершины одного и того же класса, то в Π_{n+1} имеется вполне связное разбиение.*

Эта теорема очевидна при $n=1$ и $n=2$ и довольно просто доказывается при $n=3$. Если бы удалось доказать ее при $n=4$, то тем самым была бы доказана и теорема о четырех красках, поскольку у плоского графа не существует пяти попарно смежных вершин.

[Предположение Креверас (G. Kreweras).]

13. Другое предположение, не доказанное и не опровергнутое, из которого вытекала бы теорема о четырех красках, состоит в следующем: *всякий плоский однородный граф степени 3 без перешейков обладает факториодом, все циклы которого — четной длины.*

[Предположение Тэта (P. G. Tait).]

14. Наконец:

Пусть S — поверхность, G — S -топологический граф с хроматическим числом k ; при помощи отождествления смежных вершин (т. е. стягивания ребер) можно получить полный граф с k вершинами.

Это предположение доказано во многих частных случаях Дираком (G. Dirac); если доказать его для $k=5$, то отсюда будет вытекать теорема о четырех красках.

[Предположение Хадвигера (Hadwiger).]¹⁾

¹⁾ Так как S -топологический граф после стягивания любого ребра остается S -топологическим, то из формулировки предположения Хадвигера можно вовсе исключить упоминание о поверхности. Получим высказывание: *всякий граф с хроматическим числом k можно при помощи стягиваний ребер превратить в полный k -вершинный граф*; из справедливости этого предположения при $k=5$ по-прежнему вытекает теорема о четырех красках. — *Прим. перев.*

V. О некоторых основных принципах подсчета

Puze (J. Riguet)

Если для данного графа G нужно подсчитать число различных типов подграфов или частичных графов, удовлетворяющих определенным условиям, то задача требует алгебраического аппарата; мы ставим здесь целью изложить в весьма общей форме наиболее существенные принципы.

Подстановки множества

Пусть X — конечное множество; назовем *подстановкой* множества X всякое взаимнооднозначное отображение X на X . Например, такое отображение e , что $e(x) = x$ при любом $x \in X$ является подстановкой, называемой *единичной подстановкой*. Если g — подстановка X , то обратное отображение g^{-1} также есть подстановка X . Если g и h — две подстановки X , то результирующее отображение gh , определяемое как $gh(x) = g[h(x)]$, является подстановкой X . Если g — подстановка X , а n — натуральное число, то отображение g^n , по определению равное

$$g^n(x) = ggg \dots g(x),$$

есть подстановка X , называемая *n -й степенью* подстановки g . Отображение g^{-n} , равное, по определению,

$$g^{-n}(x) = g^{-1}g^{-1}g^{-1} \dots g^{-1}(x),$$

также представляет собой подстановку X , называемую *минус n -й степенью* подстановки g . Часто полагают $g^0 = e$.

Если для двух элементов $x, y \in X$ существует такое целое число n , что $y = g^n(x)$, то мы напишем $y \tau_g x$. Отношение τ_g есть эквивалентность, ибо

$$x = g^0(x) \text{ (рефлексивность),}$$

$$y = g^n(x) \Rightarrow x = g^{-n}(y) \text{ (симметрия),}$$

$$y = g^n(x), \quad z = g^m(y) \Rightarrow z = g^{m+n}(x) \text{ (транзитивность).}$$

Отношение τ_g называется *транзитивной эквивалентностью для подстановки g* . Как известно, каждое отношение эквивалентности

на множестве X определяет разбиение X на попарно непересекающиеся классы эквивалентности; классы эквивалентности для g называются *классами транзитивности подстановки g* .

Циклом подстановки g называется всякая подстановка, которая получится, если область действия g ограничить одним из ее классов транзитивности; сама подстановка g представляет собой произведение циклов, взятых в любом порядке.

Пример. Пусть $X = \{a, b, c, d, e\}$, а подстановка g определена так:

$$g(a) = d, \quad g(b) = c, \quad g(c) = b, \quad g(d) = e, \quad g(e) = a.$$

Обычно пишут

$$g = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & c & b & e & a \end{pmatrix}.$$

Классами транзитивности g служат подмножества $\{a, d, e\}$ и $\{b, c\}$, а соответственные циклы суть подстановки

$$\begin{pmatrix} a & d & e & b & c \\ d & e & a & b & c \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} b & c & a & d & e \\ c & b & a & d & e \end{pmatrix},$$

обозначаемые также более просто через (ade) и (bc) . Таким образом, можно написать

$$g = (ade)(bc).$$

Если ρ — эквивалентность на множестве X , то множество классов эквивалентности называют *фактор-множеством X по ρ* и обозначают символом X/ρ . Если все классы эквивалентности $C \in X/\rho$ обладают одним и тем же числом элементов, то говорят, что отношение эквивалентности ρ *регулярно*.

Подстановка g множества X называется *регулярной*, если τ_g — регулярная эквивалентность; в этом случае из $x = g^n(x)$ для некоторого $x \in X$ следует $y = g^n(y)$ для всех $y \in X$.

Транзитивная эквивалентность группы подстановок

Говорят, что множество G подстановок множества X образует *группу*, если

- 1° $e \in G$;
- 2° $g, h \in G \Rightarrow gh \in G$;
- 3° $g \in G \Rightarrow g^{-1} \in G$.

Например, множество S_X всех подстановок X является группой, называемой *симметрической группой множества X* . Множество

$$\{e, g, g^2, g^3, \dots; g^{-1}, g^{-2}, \dots\},$$

составленное всеми целыми степенями одной и той же подстановки g , образует группу, называемую *циклической группой*, порожденной подстановкой g .

Пусть G — некоторая группа подстановок множества X ; если для двух элементов $x, y \in X$ существует такая подстановка $g \in G$, что $y = g(x)$, то мы напишем $y \tau_G x$. Отношение τ_G есть эквивалентность, ибо

$$x = e(x), \quad e \in G \text{ (рефлексивность);}$$

$$y = g(x), \quad g \in G \Rightarrow x = g^{-1}(y), \quad g^{-1} \in G \text{ (симметрия);}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = g(x), \quad g \in G \\ z = h(y), \quad h \in G \end{array} \right\} \Rightarrow z = hg(x), \quad hg \in G \text{ (транзитивность).}$$

Отношение τ_G называется *транзитивной эквивалентностью группы G* , а соответственные классы эквивалентности — *классами транзитивности группы G* .

Если имеется только один класс транзитивности, то он совпадает со всем множеством X ; в этом случае говорят, что группа G *транзитивна*.

Если g — подстановка X , а G — циклическая группа, порожденная g , то, очевидно, транзитивная эквивалентность g совпадает с транзитивной эквивалентностью G ; подстановка g состоит из одного-единственного цикла тогда и только тогда, когда циклическая группа, порожденная g , транзитивна.

Подсчет числа классов транзитивности

Пусть g — некоторая подстановка X ; положим

$$X_g = \{x/x \in X, g(x) = x\}.$$

Для произвольной группы G подстановок X и произвольного элемента $x \in X$ положим

$$G_x = \{g/g \in G, g(x) = x\}.$$

Непосредственно проверяется, что G_x образует подгруппу группы G . Поставим задачу о подсчете числа элементов фактор-множества X/τ_G в зависимости от различных $|X_g|$ при $g \in G$.

Лемма 1. Пусть G — некоторая группа подстановок множества X , G_x — подгруппа G , образованная теми подстановками G , которые оставляют неизменным некоторый элемент $x \in X$; тогда

$$|\tau_G(x)| = \frac{|G|}{|G_x|},$$

где $\tau_G(x)$ означает тот класс транзитивности группы G , который содержит элемент x .

Определим однозначное отображение φ_x группы G в множество X следующим образом:

$$\varphi_x(g) = g(x) \quad (g \in G).$$

Имеем $\varphi_x(G) = \tau_G(x)$; кроме того,

$$\varphi_x(g) = \varphi_x(h) \iff g(x) = h(x) \iff h \in gG_x.$$

Иначе говоря, φ_x есть взаимнооднозначное соответствие между

$$G/\varphi_x^{-1}\varphi_x \quad \text{и} \quad G/G_x.$$

Но, как известно, само $G/\varphi_x^{-1}\varphi_x$ находится во взаимнооднозначном соответствии с $\varphi_x(G) = \tau_G(x)$; тем самым лемма доказана.

Лемма 2. Если x и y — два элемента одного и того же класса транзитивности группы G , то

$$|G_x| = |G_y|.$$

Действительно, для $y = g(x)$, $g \in G$ можно написать

$$G_y = G_{g(x)} = \{h/h \in G, hg(x) = g(x)\} = \{h/h \in G, g^{-1}hg(x) = x\}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} g^{-1}G_xg &= \{h/h \in G; \text{существует такое } k \in G_x, \text{ что } h = g^{-1}kg\} = \\ &= \{h/h \in G, g^{-1}hg(x) = x\}. \end{aligned}$$

Значит, имеем окончательно $G_y = gG_xg^{-1}$; но, как известно, если A — любое подмножество группы G , а $g, h \in G$, то $|gAh| = |A|$, ибо

$$ga_1h = ga_2h \Rightarrow a_1h = a_2h \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Таким образом, лемма доказана.

Основная теорема. Пусть G — группа подстановок множества X ; тогда

$$|X/\tau_G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|.$$

В самом деле, подсчитывая двумя способами такие пары (g, x) для которых $g(x) = x$, находим

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |X_g|. \quad (1)$$

Но

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{c \in X/\tau_G} \sum_{c \in G} |G_c|. \quad (2)$$

Рассмотрим некоторый класс транзитивности $C \in X/\tau_G$ и некоторый элемент $x \in C$; в силу леммы 2

$$\sum_{c \in C} |G_c| = |\tau_G(x)| \cdot |G_x|.$$

В силу леммы 1

$$|\tau_G(x)| = |G|/|G_x|.$$

Следовательно,

$$\sum_{c \in C} |G_c| = |G|,$$

и равенство (2) можно записать так:

$$\sum_{x \in X} |G_x| = |X/\tau_G| \cdot |G|. \quad (2')$$

Сравнивая (1) и (2'), получаем требуемую формулу.

Разбиение, связанное с эквивалентностью

Назовем *разбиением* (в смысле теории чисел) однозначное отображение α множества $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ натуральных чисел в множество всех натуральных чисел; разбиение, относящее числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ соответственно числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, удобно обозначать через

$$\alpha = (\lambda_1^{\alpha_1}, \lambda_2^{\alpha_2}, \dots, \lambda_s^{\alpha_s}).$$

Ясно, что это понятие нельзя смешивать с тем понятием *разбиения* (в смысле теории множеств), которое было определено в гл. I, но последнее нам здесь не понадобится. Будем называть *весом* разбиения α целое число

$$w(\alpha) = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_s \lambda_s.$$

Назовем *размерностью* разбиения число

$$d(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s.$$

Пример. Разбиение $(1^3, 3^2, 4)$ имеет вес 13 и размерность 6; ему отвечает следующее разложение числа 13 в сумму натуральных чисел:

$$13 = 4 + 3 + 1 + 3 + 1 + 1.$$

Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве X , а φ — взаимнооднозначное отображение X на множество Y ; тогда многозначное отображение $\varphi \rho \varphi^{-1}$ множества Y в себя определяет эквивалентность на Y , классы которой $\varphi \rho \varphi^{-1}(y)$ являются образами классов эквивалентности ρ .

Два отношения эквивалентности ρ и σ , определенные соответственно на множествах X и Y , называются *сопряженными*, если существует такое взаимнооднозначное отображение φ , что $\sigma = \varphi \rho \varphi^{-1}$.

Разбиение, связанное с отношением эквивалентности ρ , — это разбиение

$$\mathfrak{p}[\rho] = (\lambda_1^{\alpha_1}, \lambda_2^{\alpha_2}, \dots),$$

причем ровно α_1 классов содержат по λ_1 элементов, α_2 классов — по λ_2 элементов и т. д. Вес $\mathfrak{p}[\rho]$ равен $|X|$, а размерность равна $|X/\rho|$. Легко доказывается

Предложение 1. Отношения эквивалентности ρ и σ , определенные соответственно на множествах X и Y , сопряжены тогда и только тогда, когда связанные с ними разбиения одинаковы.

ПРИМЕР. $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, ρ определено классами эквивалентности:

$$\{a, b, c\}, \quad \{d, e\}, \quad \{f\}, \quad \{g\}.$$

При подстановке $\varphi = (adg)(be)(cf)$ эквивалентность $\sigma = \varphi\rho\varphi^{-1}$ имеет классы:

$$\{d, e, f\}, \quad \{g, b\}, \quad \{c\}, \quad \{a\}.$$

Ясно поэтому, что $\mathfrak{p}[\rho] = \mathfrak{p}[\sigma] = (1^2, 2, 3)$.

Циклический индекс

Понятие разбиения, связанного с данной эквивалентностью, позволяет по-новому сформулировать основную теорему. Сначала введем понятие *индекса*, принадлежащее Пойа.

Пусть G — группа подстановок множества X , а α — некоторое разбиение с весом $w(\alpha) = |X|$; обозначим через $h_G(\alpha)$ число таких подстановок $g \in G$, что $\mathfrak{p}[\tau_g] = \alpha$.

Назовем *циклическим индексом* группы G функцию q_G , которая каждому разбиению α относит число

$$q_G(\alpha) = \frac{h_G(\alpha)}{|G|}.$$

Лемма. Если $g \in G$, то

$$|X_g| = \mathfrak{p}[\tau_g](1),$$

где $\mathfrak{p}[\tau_g](1)$ — число классов эквивалентности τ_g , сводящихся к одному элементу, то есть таких классов, каждый из которых порожден некоторым элементом X , инвариантным относительно g .

Новая формулировка основной теоремы. Если G — группа подстановок множества X , то

$$|X/\tau_G| = \sum_{w(\alpha) = |X|} q_G(\alpha) \alpha(1).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} |X/\tau_G| &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} p[\tau_g](1) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{w(a)=|X|} h_G(a) a(1) = \sum_{w(a)=|X|} q_G(a) a(1). \end{aligned}$$

Сопряженные однозначные отображения

Пусть f — однозначное отображение множества X в некоторое множество Y ; отображение $f^{-1}f$ определяет отношение эквивалентности на X , причем класс $f^{-1}f(x)$ представляет собой множество тех элементов X , которые имеют тот же образ, что и x ; мы скажем, что f есть *отображение типа α* , если $\alpha = p[f^{-1}f]$.

Пусть f_1 — однозначное отображение некоторого множества X_1 в некоторое Y_1 , а f_2 — однозначное отображение некоторого X_2 в некоторое Y_2 ; будем говорить, что f_1 и f_2 *сопряжены*, если существуют такие взаимнооднозначное отображение φ множества X_1 на X_2 и взаимнооднозначное отображение ψ множества Y_1 на Y_2 , что

$$f_2\varphi = \psi f_1.$$

Предложение 2. *Два однозначных отображения f_1 и f_2 сопряжены тогда и только тогда, когда $p[f_1^{-1}f_1] = p[f_2^{-1}f_2]$.*

Предложение 3. *Для сопряженности двух однозначных отображений f_1 и f_2 множеств X_1 и X_2 в Y достаточно, чтобы существовало такое взаимнооднозначное отображение φ множества X_1 на X_2 , что $f_2\varphi = f_1$.*

Степень однозначного отображения

Пусть f — однозначное отображение конечного множества X на множество Y ; назовем *степенью* отображения f такое отображение δf , которое каждому $y \in Y$ относит количество элементов множества $f^{-1}(y)$.

Предложение 4. *Два отображения f_1 и f_2 множеств X_1 и X_2 в Y имеют одну и ту же степень тогда и только тогда, когда существует такое взаимнооднозначное отображение φ множества X_1 на X_2 , что $f_2\varphi = f_1$.*

В частности, из $\delta f_1 = \delta f_2$ следует, что f_1 и f_2 имеют один и тот же образ и сопряжены.

Отсюда, как и прежде, вытекает, что отображение f есть отображение типа α тогда и только тогда, когда $\delta\delta f = \alpha$, т. е. когда α есть разбиение, связанное с δf .

Предложение 5. Если отображение f — типа α , то отображение δf — типа $\delta\alpha$.

Действительно, из $\delta\delta f = \alpha$ следует $\delta\delta\delta f = \delta\alpha$.

Пусть ν — однозначное отображение некоторого конечного множества X в множество натуральных чисел; назовем *размерностью* ν число

$$d(\nu) = \sum_{x \in X} \nu(x)$$

(в случае, когда ν представляет собой разбиение, мы снова получаем понятие „размерности разбиения“).

Предложение 6. Имеем:

$$d(\nu) = w(\delta\nu), \quad |X| = d(\delta\nu).$$

Отсюда следует, что если f — однозначное отображение X в Y типа α , то

$$|X| = w(\alpha), \quad |f(x)| = d(\alpha).$$

Слова и абелевы слова

Будем называть *словом* всякую конечную последовательность элементов заданного множества X . *Типом* слова m назовем разбиение $\alpha = (\lambda_1^{\alpha_1}, \lambda_2^{\alpha_2}, \dots, \lambda_s^{\alpha_s})$, которое указывает, что имеется α_1 элементов X , фигурирующих в m ровно λ_1 раз, α_2 элементов, фигурирующих λ_2 раз, и т. д. Таким образом, число элементов X , фигурирующих в m , будет $d(\alpha)$, в то время как длина слова равна $w(\alpha)$.

Когда слово рассматривается независимо от порядка расположения в нем элементов X , говорят, что это *абелево слово*.

Пример. Если $X = \{a, c, p, q, r, t\}$, то слово $trcpaccqtr$ имеет тип $(1^2, 2^3, 3)$. Если это слово абелево, то оно тождественно, например, слову $aacttrrpqcc$; весьма часто его отождествляют с отображением X в множество натуральных чисел, именно

$$\nu = \begin{pmatrix} a & c & p & q & r & t \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если слово $trcpaccqtr$ не является абелевым, то его отождествляют с отображением интервала $I_{11} = \{1, 2, 3, 4, \dots, 11\}$ на X , именно

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ t & r & c & p & a & c & c & a & q & t & r \end{pmatrix}.$$

Поэтому его степень представляет собой абелево слово

$$\delta m = \begin{pmatrix} a & c & p & q & r & t \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Его тип есть разбиение

$$\delta \delta m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1^2, 2^3, 3).$$

В дальнейшем мы через $M(X)$ будем обозначать множество слов, содержащих каждый из элементов X хотя бы один раз; через $M_a(X)$ — множество слов $M(X)$ типа a ; через $M_v(X)$ — множество тех слов $M(X)$, для которых абелево слово есть v ; через $M_l(X)$ — множество слов $M(X)$ длины l . Через I_l обозначаем интервал $\{1, 2, \dots, l\}$.

Наконец, пусть G — группа подстановок множества I_l и пусть $g \in G$.

Обозначим через \bar{g} подстановку множества $M_l(X)$, определяемую следующим образом:

$$\bar{g}(m) = mg \quad (m \in M_l(X)).$$

Предложение 7. Множество \bar{G} подстановок \bar{g} образует группу, называемую продолжением G на $M_l(X)$.

Действительно, если g и h — две любые подстановки множества I_l , то

$$\overline{gh^{-1}} = \bar{g} \cdot \bar{h}^{-1}.$$

Если a — заданное разбиение, то множество $M_a(X)$ слов типа a , образованных из X и содержащих все элементы X , является объединением попарно непересекающихся подмножеств, образованных из $M_v(X)$, где v — степень a :

$$M_a(X) = \bigcup_{\delta v = a} M_v(X). \quad (1)$$

Но существует и другой способ разложения $M_a(X)$. Именно, рассмотрим отношение эквивалентности ρ на множестве целых чисел $\{1, 2, \dots, s-1, s\}$ и обозначим через $M_\rho(X)$ множество тех $m \in M(X)$, для которых $m^{-1}m = \rho$. Тогда $M_a(X)$ будет объединением попарно непересекающихся подмножеств, образованных из $M_\rho(X)$, в которых ρ связано с разбиением a :

$$M_a(X) = \bigcup_{\rho[\rho] = a} M_\rho(X). \quad (2)$$

Из двух способов разложения (1) и (2) сразу получается более мелкое разложение:

$$M_a(X) = \bigcup_{\substack{\delta v = a \\ \rho[\rho] = a}} M_v(X) \cap M_\rho(X). \quad (3)$$

Обозначим через $M_{\nu, g}(X)$ множество таких слов $m \in M_{\nu}(X)$, для которых

$$m^{-1}m \supset \tau_g.$$

Через $M_g(X)$ обозначим объединение множеств $M_{\rho}(X)$ для всех эквивалентностей ρ , удовлетворяющих условию $\rho \supset \tau_g$.

Имеем:

$$M_{\nu, g}(X) = M_{\nu}(X) \cap M_g(X).$$

Предложение 8. Если g — подстановка интервала

$$I_l = \{1, 2, \dots, l\},$$

то множество слов $m \in M_l(X)$, инвариантных относительно подстановки \bar{g} , есть $M_g(X)$.

В самом деле,

$$\begin{aligned} \bar{g}(m) = m &\iff mg = m \iff mg(i) = m(i) \text{ для всех } i \in I_l \iff \\ &\iff g(i) \in m^{-1}m(i) \text{ при всех } i \in I_l \iff \\ &\iff g^n(i) \in m^{-1}m(i) \text{ при всех } i \in I_l \text{ и всех целых } n \iff \\ &\iff \tau_g(i) \in m^{-1}m(i) \text{ при всех } i \in I_l \iff \\ &\iff \tau_g \subset m^{-1}m. \end{aligned}$$

А это доказывает предложение.

Следствие. Для заданной подстановки g интервала I_l множество слов из $M_{\nu}(X)$, инвариантных относительно \bar{g} , есть

$$M_{\nu, g}(X).$$

Предложение 9. Пусть ν — абелево слово из элементов X , имеющее длину $d(\nu) = l$, и пусть G — группа подстановок интервала I_l . Пусть \bar{G} — продолжение G на $M_{\nu}(X)$. Тогда

$$|M_{\nu}(X)/\tau_{\bar{G}}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_{\nu, g}(X)|.$$

В силу предложения 4 множество тех отображений f множества X в Y , которые имеют одну и ту же степень и удовлетворяют условию $f^{-1}f \supset \rho$, где ρ — данная эквивалентность, получается умножением одного из таких отображений справа на подстановки φ , такие что $\varphi \rho \varphi^{-1} = \rho$.

Это замечание показывает, что $|M_{\nu, g}(X)|$ зависит только от δ_{ν} и $\rho[\rho]$. Поэтому положим

$$|(M_{\nu, g}(X))| = \Phi(\delta_{\nu}, \rho[\rho]),$$

Предложение 10. Пусть ν — абелево слово над X длины $d(\nu) = l$ и пусть G — группа подстановок интервала I_l . Пусть, далее, \bar{G} — продолжение G на $M_\nu(X)$. Тогда

$$|M_\nu(X)/\tau_{\bar{G}}| = \sum_{w(\alpha)=l} q_G(\alpha) \Phi(\delta\nu, \alpha).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} |M_\nu(X)/\tau_{\bar{G}}| &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Phi(\delta\nu, p[\tau_g]) = \frac{1}{|G|} \sum_{w(\alpha)=l} \sum_{p[\tau_g]=\alpha} \Phi(\delta\nu, \alpha) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{w(\alpha)=1} h_G(\alpha) \Phi(\delta\nu, \alpha) = \sum_{w(\alpha)=l} q_G(\alpha) \Phi(\delta\nu, \alpha). \end{aligned}$$

Прежде чем показать, каким образом на этом предложении основываются процессы подсчета, рассмотрим несколько частных случаев.

Назовем *многочленным коэффициентом* функцию c , относящую каждому разбиению $\alpha = (\lambda_1^{\alpha_1}, \dots, \lambda_s^{\alpha_s})$ число

$$c(\alpha) = \frac{(\alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_s \lambda_s)!}{(\lambda_1!)^{\alpha_1} \dots (\lambda_s!)^{\alpha_s}}.$$

Легко видеть, что число тех отображений множества X на множество Y , которые имеют заданную степень ν , равно $c(\delta\nu)$. Но это число совпадает с числом таких слов m степени ν , для которых $x \in m^{-1}m(x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} |M_\nu(X)| &= c(\delta\nu), \\ \Phi(\alpha, 1^\nu) &= c(\alpha). \end{aligned}$$

Так как $M_\nu(X) \cap M_\rho(X) = \emptyset$ при $d(\nu) > d(\rho)$, то матрица $\Phi(\alpha, \beta)$ — треугольная (см. рис. 1).

Введем функцию разбиения $k(\alpha)$, полагая

$$k(\alpha) = c(\delta\alpha).$$

Легко видеть, что $k(\alpha)$ выражает как раз число абелевых слов степени α .

Введем также функцию разбиения $e(\alpha)$, полагая

$$e(\alpha) = \frac{c(\alpha) k(\alpha)}{d(\alpha)!} = \frac{(\alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_s \lambda_s)!}{(\lambda_1!)^{\alpha_1} \dots (\lambda_s!)^{\alpha_s} \alpha_1! \dots \alpha_s!}.$$

Легко видеть, что $e(\alpha)$ выражает как раз число таких отношений эквивалентности ρ , для которых $p[\rho] = \alpha$.

2	1	1 ²
0	1	2
1 ²	2	a / b

6	3	1	1 ³
0	1	1	1,2
0	0	1	3
1 ³	1,2	3	a / b

24	12	6	4	1	1 ⁴
0	2	2	2	1	1 ² ,2
0	0	2	0	1	2 ²
0	0	0	1	1	1,3
0	0	0	0	1	4
1 ⁴	1 ² ,2	2 ²	1,3	4	a / b

120	60	30	20	10	5	1	1 ⁵
0	6	6	6	4	3	1	1 ³ ,2
0	0	2	0	2	1	1	1,2 ²
0	0	0	2	1	2	1	1 ² ,3
0	0	0	0	1	0	1	2,3
0	0	0	0	0	1	1	1,4
0	0	0	0	0	0	1	5
1 ⁵	1 ³ ,2	1,2 ²	1 ² ,3	2,3	1,4	5	a / b

Р и с 1.

Пример

Дано шесть шаров: 3 красных, 2 черных и 1 белый, причем шары одинакового цвета считаются неразличимыми; сколькими способами можно разместить эти шары по вершинам свободного октаэдра в пространстве?

Допустим сначала, вопреки условию, что октаэдр *фиксирован* в пространстве. Пусть $X = \{a, b, c\}$, где a означает черный цвет, b — белый, c — красный. Тогда существует взаимнооднозначное

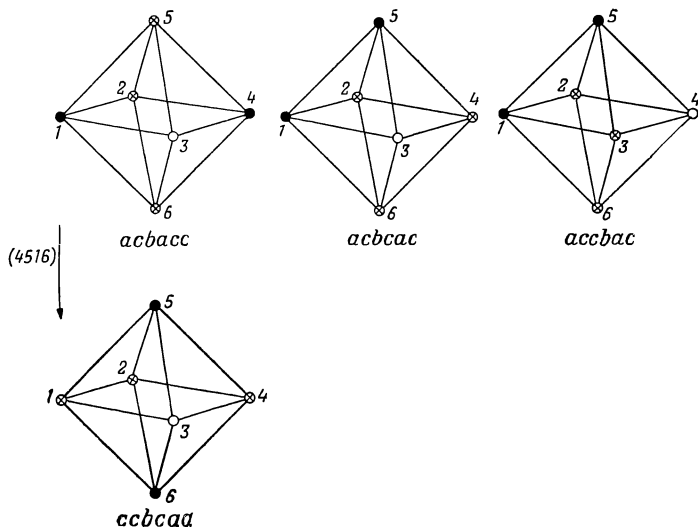
соответствие между различными размещениями шаров и словами степени ν , где ν — абелево слово $\nu = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Поэтому ответ на вопрос в случае, когда октаэдр фиксирован, будет

$$|M_\nu(X)| = c(\delta\nu) = c(1, 2, 3) = \frac{6!}{1! 2! 3!} = 60.$$

Рассмотрим теперь *свободный* октаэдр в пространстве. Здесь существует взаимнооднозначное соответствие между различными размещениями шаров и классами транзитивности слов степени ν относительно группы G различных движений октаэдра. Ответом на вопрос на этот раз будет

$$|M_\nu(X)/\tau_G| = \sum_{w(a)=6} q_G(a) \Phi[(1, 2, 3), a].$$

Теперь надо найти циклический индекс q_G для группы G октаэдра. Пронумеруем вершины октаэдра цифрами от 1 до 6, как показано на рисунке 2, и пересчитаем элементы G .



Имеется одна подстановка $g \in G$, для которой $p[\tau_g] = (1^6)$, — именно тождественная подстановка.

Имеется 6 подстановок $g \in G$, таких, что $p[\tau_g] = (1^2, 4)$; они образованы шестью вращениями на 90° вокруг диагонали, — именно (4516), (6154), (1243), (3421), (2536), (6352).

Имеются 3 подстановки $g \in G$, такие, что $p[\tau_g] = (1^2, 2^2)$; они образованы тремя вращениями на 180° вокруг диагонали, — именно

$$(41)(56), \quad (14)(23), \quad (23)(56).$$

Имеется 6 подстановок $g \in G$, таких, что $p[\tau_g] = (2^3)$; они образованы шестью вращениями на 180° вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, — именно

$$\begin{aligned} (12)(34)(56), & \quad (13)(24)(56), & \quad (14)(25)(36), \\ (14)(35)(26), & \quad (15)(46)(23), & \quad (16)(45)(23). \end{aligned}$$

Имеется 8 подстановок $g \in G$, для которых $p[\tau_g] = (3^2)$; они образованы восемью вращениями на 120° вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней.

Эти 60 подстановок образуют группу октаэдра G . Следовательно,

$$\begin{aligned} q_G(1^6) &= \frac{1}{24}, & q_G(1^2, 4) &= \frac{6}{24}, & q_G(1^2, 2^2) &= \frac{3}{24}, \\ q_G(2^3) &= \frac{6}{24}, & q_G(3^2) &= \frac{8}{24}, \end{aligned}$$

остальные значения q_G равны нулю.

Кроме того, нам известно, что

$$\Phi[(1, 2, 3), (1^6)] = c(1, 2, 3) = 60;$$

$\Phi[(1, 2, 3), (1^2, 4)] = 0$, так как абелево слово a^2bc^3 не содержит ни одного элемента в четвертой степени;

$\Phi[(1, 2, 3), (1^2, 2^2)] = 4$, так как абелево слово a^2bc^3 можно записать четырьмя различными способами:

$$\begin{aligned} (b)(c)(a^2)(c^2), & \quad (b)(c)(c^2)(a^2), \\ (c)(b)(a^2)(c^2), & \quad (c)(b)(c^2)(a^2); \end{aligned}$$

$\Phi[(1, 2, 3), (2^3)] = 0$, поскольку абелево слово a^2bc^3 не содержит никакой степени трижды;

$\Phi[(1, 2, 3), (3^2)] = 0$, поскольку абелево слово a^2bc^3 не содержит трех квадратов в качестве сомножителей.

Итак,

$$|M_*(X)/\tau_{\bar{G}}| = \frac{60}{24} + \frac{3}{24} \cdot 4 = 3.$$

Следовательно, ответ на поставленную задачу такой: имеется только три различных способа размещения 3 красных, 2 черных и 1 белого шаров на свободном октаэдре в пространстве. На рис 2 эти три размещения показаны в одном горизонтальном ряду (крестиком помечены красные шары). Под октаэдром с размещением $acsbacc$ изображен октаэдр с размещением $scbsaaa$. Эти два размещения, очевидно, эквивалентны, ибо первое можно перевести во второе вращением октаэдра вокруг диагонали 2, 3, т. е. подстановкой (4516).

VI. Дополнения к русскому переводу

А. А. Зыков и Г. И. Кожухин

Непосредственные следствия из теоремы Радо

В ряде случаев теорема Радо (гл. 3) позволяет заключить о наличии у локально конечного графа G некоторого свойства, если известно, что этим свойством обладает каждый конечный подграф G . На таком принципе построено обобщение 2 теоремы Ричардсона (гл. 5). Мы приведем еще два примера.

1. Пусть G — локально конечный симметрический граф и пусть каждый его конечный подграф является p -хроматическим; тогда и сам граф G — p -хроматический.

Для доказательства достаточно в теореме Радо положить

$$E_0 = \{1, 2, \dots, p\}, \quad E(I) = E_0 \setminus I.$$

2. Пусть G — локально конечный граф и пусть каждый его конечный подграф допускает функцию Гранди, значения которой не превышают числа q ; тогда и весь граф G допускает функцию Гранди со значениями, не превосходящими q .

Это следует из теоремы Радо, если положить

$$E_0 = \{0, 1, 2, \dots, q\},$$

$$E(I) = \begin{cases} \emptyset & \text{при } I = \emptyset; \\ \{n\}, & \text{где } n = \min \{x/x \in E_0 \setminus I\}, \text{ при } I \neq \emptyset. \end{cases}$$

Взвешенная окраска вершин графа¹⁾

Пусть $G = (X, U)$ — конечный симметрический граф, $|X| = n$, $|U| = m$. Как известно (гл. 4), проверка того, является ли данный граф p -хроматическим, сводится к проверке разрешимости в целых числах системы линейных неравенств 1°, 2°, 3° (стр. 41). Желая найти этим способом хроматическое число данного графа G , мы вынуждены последовательно задавать значения p и для каждого из них выяснять, разрешима ли система.

Можно, однако, составить такую линейную программу, которая всегда разрешима в целых числах и решение которой дает одну из окрасок вершин графа G наименьшим количеством цветов. С этой

¹⁾ Излагаемый здесь результат принадлежит Г. И. Кожухину.

целью каждому цвету $q = 1, 2, 3, \dots$ отнесем его „вес“ — натуральное число $a_q^{(n)}$, причем веса подберем так, чтобы при всех $q = 1, 2, \dots, n$ выполнялось неравенство

$$a_1^{(n)} + a_2^{(n)} + \dots + a_{q-1}^{(n)} + (n - q + 1) a_q^{(n)} < \\ < (n - q) a_1^{(n)} + a_2^{(n)} + \dots + a_{q-1}^{(n)} + a_q^{(n)} + a_{q+1}^{(n)},$$

т. е.

$$a_{q+1}^{(n)} > (n - q) a_q^{(n)} - (n - q - 1) a_1^{(n)}; \quad (*)$$

это неравенство гарантирует, что „самая легкая“ окраска вершин графа с помощью $q+1$ цветов все-таки „тяжелее“, чем „самая тяжелая“ окраска q цветами. Неравенство (*) наверняка выполняется, если

$$a_{q+1}^{(n)} = (n - q) a_q^{(n)} - (n - q - 1) a_1^{(n)} + 1;$$

полагая $a_1^{(n)} = 1$, мы получаем

$$a_{q+1}^{(n)} = (n - q) [a_q^{(n)} - 1] + 2,$$

откуда находим последовательно:

$$a_2^{(n)} = 2, \quad a_3^{(n)} = n, \quad a_4^{(n)} = n^2 - 4n + 5, \dots$$

Таблицу (с двойным входом) значений коэффициентов $a_q^{(n)}$ можно составить раз навсегда независимо от графа G .

Задача раскраски вершин заданного графа G наименьшим числом цветов сводится теперь к нахождению „самой легкой“ раскраски, т. е. к решению в целых числах линейной программы

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_q^i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad q = 1, 2, \dots, n); \\ \sum_{q=1}^n \xi_q^i = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n); \\ \sum_{k=1}^n r_j^k \xi_q^k \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, m; \quad q = 1, 2, \dots, n); \\ \sum_{i=1}^n \sum_{q=1}^n a_q^{(n)} \xi_q^i \text{ принимает наименьшее значение.} \end{array} \right.$$

После того как числа ξ_q^i найдены, хроматическое число графа G вычисляется без труда

$$\gamma(G) = \sum_{q=1}^n \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - \xi_q^i) \right].$$

Обоснование алгоритма нахождения наибольшего потока по x_0z -плоской транспортной сети

Пусть x_0z -плоская транспортная сеть G расположена на плоскости в соответствии с 1° (стр. 85). Если μ — произвольный элементарный путь из x_0 в z , то вместе с вспомогательной дугой (z, x_0) он образует элементарный контур; область плоскости, ограниченную этим контуром (включая границу), будем обозначать через $D(\mu)$. Из 1° ясно, что наивысший путь μ_1 из x_0 в z является элементарным и характеризуется следующим свойством: всякий элементарный путь из x_0 в z целиком принадлежит $D(\mu_1)$.

Поток по сети G (при конкретном расположении ее в плоскости), находимый описанным в 1°, 2°, 3° процессом, будем кратко называть *FF-поток*ом. Докажем, что это наибольший поток. Доказательство будем вести индукцией по величине потока φ_z .

Утверждение тривиально при $\varphi_z = 0$. Допустим, что оно справедливо для всех x_0z -плоских сетей (при всевозможных расположениях), обладающих *FF*-поток $ом$ величины n . Рассмотрим произвольную x_0z -плоскую сеть G , для которой *FF*-поток φ имеет величину $\varphi_z = n + 1$; надо доказать, что поток φ — наибольший.

Предположим противное: что поток φ не является наибольшим и что, следовательно, возможен такой поток φ' по G , для которого $\varphi'_z = n + 2$. Можно считать, что G не содержит контуров с положительными значениями φ' на всех дугах, ибо иначе мы ликвидировали бы все контурные потоки, вычитая из значений $\varphi'(u)$ на дугах каждого такого контура наименьшее значение (для данного контура) — эта переделка потока φ' не меняет его величины φ'_z . Поэтому мы можем предполагать поток φ' таким, что всякая дуга u сети G , несущая положительный поток $\varphi'(u)$, принадлежит некоторому элементарному пути, который идет из x_0 в z и на всех дугах которого $\varphi' > 0$.

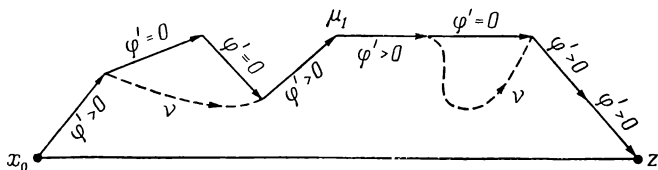


Рис. 1

Пусть μ_1 — наивысший (элементарный) путь сети G . Не может быть $\varphi'(u) > 0$ на всех дугах $u \in \mu_1$, ибо иначе, уменьшив пропускные способности дуг этого пути на единицу (без изменения способностей остальных дуг сети), мы получили бы сеть G' , которая, с одной стороны, допускает поток величины $n + 1$ и для которой, с другой стороны, *FF*-поток имеет величину n (как следует из определения

FF -потока и из того, что для сети G он обладает величиной $n + 1$), а это противоречит предположению индукции.

Пусть теперь ν — наивысший из тех элементарных путей сети G , идущих из x_0 в z , на всех дугах которых $\varphi' > 0$; так как ни одна дуга сети, несущая положительный поток φ' , не может лежать вне области $D(\nu)$ (иначе существовал бы элементарный путь, несущий положительный поток φ' из x_0 в z и не лежащий целиком в $D(\nu)$, т. е. ν не был бы наивысшим), то путь ν наверняка содержит все те дуги пути μ_1 , на которых $\varphi' > 0$ (см. рис. 1).

Уменьшим на единицу поток по тем дугам пути ν , которые не принадлежат μ_1 , а вместо этого пропустим единичный поток по дугам μ_1 , не принадлежащим ν . Полученный такой переделкой из φ' поток φ'' по сети G будет по-прежнему обладать величиной $\varphi''_z = n + 2$ и будет положительным на всех дугах пути μ_1 , а это, как мы уже видели, невозможно.

Ч. И Т. Д.

ЛИТЕРАТУРА¹⁾

Гл. 1. Основные определения

- [1] Berge C., *Espaces topologiques et Fonctions multivoques*, Paris, Dunod, 1959, XI, 272 p., ill²⁾.
- [2] Berge C., Sur l'Isovalence et la Régularité des Transformateurs, *C. R. Acad. Sciences*, **231** (1950), стр. 1404.— Sur une Théorie Ensembliste des Jeux Alternatifs, *C. R. Acad. Sciences*, **232** (1951), стр. 294.
- [3] König D., *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*, Leipzig, 1936 (Akad. Verl. M. B. H.); New York, 1950 (Chelsea).
- [4] Riguet F., Relations binaires, fermentures, correspondances de Galois, *Bull. Soc. Math. de France*, **76** (1948), стр. 114.
- [5] Sainte-Laguë A., Les Réseaux (ou Graphen), *Mém. de Sciences Math.*, **18** (1926), Paris.

Гл. 2. Предварительное изучение квазиупорядоченности

- [1] Croisot R., Dubreil-Jacotin M. L. et Lesieur L., *Leçons sur la Théorie des Treillis* (Gauthier — Villars, éd.), Paris, 1953.
- *[2] Биркгоф Г., *Теория структур*, ИЛ, М., 1952.
- [3] Richardson M., Relativization and Extension of Solutions of Reflexive Relations, *Pacific J. of Math.*, **5** (1955), стр. 551.

Гл. 3. Порядковая функция и функция Гранди для бесконечного графа

- [1] Berge C., La Fonction de Grundy d'un Graphe Infini, *C. R. Acad. Sciences*, **242** (1956), стр. 1404.
- [2] Berge C., A Problem on Infinite Graphs, Conférence au Colloquium Harvard — M. I. T., mai 1957.
- [3] De Bruijn N. G., Erdős P., A Colour Problem for Infinite Graphs and a Problem in the Theory of Relations, *Proc. of the Nederl. Ak. W.*, **54** (1951), стр. 371.
- [4] Gottschalk W. H., Choise Functions and Tychonoff's Theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), стр. 172.

¹⁾ Работы, помеченные звездочкой, добавлены в русском переводе.

²⁾ В тексте эта книга обозначается Е. Т. F. М.

- [5] Rado R., Axiomatic Treatment of Rank in infinite sets, *Canad. J. of Math.*, **1** (1949), стр. 337.

Гл. 4. Основные числа теории графов

- [1] Berge C., Two theorems in graph theory, *Proc. Nat. Ac. Sc.*, **43** (1957), стр. 842.
- [2] Крайчик М., Le Problème des Reines, Bruxelles, 1926.
- [3] Kreweras G., Peut-on former un réseau donné avec des parties finies d'un ensemble dénombrable? *C. R. Acad. Sciences*, **222** (1946), стр. 1025.
- [4] Polyá G., Sur le nombre des isomètres de certains composés chimiques, *C. R. Acad. Sciences*, **202** (1936), стр. 1554.
- [5] Shannon C. E., The zero-error capacity of a noisy channel, *Composium on Information Theory, I. R. E. Transactions*, **3** (1956), стр. 3.
- *[6] Зыков А. А., О некоторых свойствах линейных комплексов, *Матем. сб.*, **24** (66), 2 (1949), стр. 163.
- *[7] Зыков А. А., Функции от графов, определяемые линейными уравнениями, Сообщение 3, *Изв. Сиб. отд. АН СССР*, **12** (1960), стр. 13.
- *[8] Зыков А. А., Реберно-вершинные функции и распределительные свойства графов, *ДАН СССР*, **139**, № 4 (1961), стр. 787. — Цикломатические и распределительные свойства мультиграфов (печатается в *ДАН СССР*).
- *[9] Gomory R. E., Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs, *Bull. Am. Math. Soc.*, **64** (1958), № 5, стр. 275.

Гл. 5. Ядра графа

- [1] Berge C., Théorie générale des jeux à n personnes, chap. 5: Coalitions, стр. 82, *Mem. des Sciences Math.*, **138**, Paris, 1957 (Gauthier — Villars, éd.). Есть русский перевод. Берж К., Общая теория игр нескольких лиц, Физматгиз, 1961.
- [2] Guibaud G. T., La théorie des Jeux, *Econ. Appl.*, 1949, стр. 18.
- [3] von Neumann F. and Morgenstern O., Theory of Games and Economic Behavior, Princeton, 1944, 1947 et 1953 (Princeton university Press).
- [4] Richardson M., Solutions of irreflexive relations, *Annals of Math.*, **58** (1953), стр. 573. — On Weakly ordered systems, *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), стр. 113. Extensions theorems for solutions of irreflexive relations, *Proc. of the Nat. Acad. of Sciences*, **39** (1953), стр. 649.

Гл. 6. Игры на графе

- [1] Adams E. W., Benson D. C., Nim Type games, Carnegie Inst. of Technology, Techn. Report, **13** (1956).
- [2] Berge C., Topological games with Perfect Information (Contributions to the theory of Games 3), *Annals of Math. studies*, **39** (1957), стр. 165. — Берж К., Общая теория игр нескольких лиц, Физматгиз, 1961,

- [3] Berge C et Schützenberger M. P., Jeux de Nim et Solutions, *C. R. Acad. Sciences*, **242** (1956), стр. 1672.
- [4] Grundy P. M., Mathematics and Games, *Eureka*, **2** (1939), стр. 6
- [5] Grundy P. M., Smith C. A. B., Disjunctive games with the last player loosing, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **52** (1956), стр. 527.
- [6] Holladay F. C. Cartesian Product of termination Games (Contributions to the theory of Games 3), *Ann. of Math. St.*, **39** (1957), стр. 189.
- [7] Moore E. H., A generalization of the game called Nim, *Ann. of Math*, **11** (1909), стр. 93.
- [8] Sprague R., Bemerkungen über eine spezielle Abelsche Gruppe, *Math. Z.*, **51** (1947), стр. 82. — Über mathematische Kampfspiele, *Tokohu J. of Math.*, **41** (1936), стр. 438.
- [9] Welter C. P., The theory of a class of games on a sequence of squires, in terms of the advancing operation in a special group, *Proc. Kon. Nederl. Akad. N. (série A)*, **57** (1954), стр. 194.

Гл. 7. Задача о кратчайшем пути

- [1] Beckmann M., McGuire C. B., C. B. Winsten, Studies in the economics of transportation, New Haven, 1956 (Yale university press).
- [2] Беллман Р., Динамическое программирование, ИЛ, М., 1959.
- [3] Ford L R., Network flow theory, Rand Corp. paper, P-923, 1956.
- [4] Lucas E., Récréations mathématiques, **1**, Paris, 1921, стр. 47; есть русский перевод: см. Люкас Э., Математические развлечения, СПб, 1883.
- [5] Tarry G., Le problème des Labyrinthes, *Nouvelles Annales de Math*, **14** (1895), стр. 187

Гл. 8. Транспортные сети

- [1] Berge C., Sur la déficience d'un réseau infini, *C. R. Acad. Sciences*, **245** (1957), стр. 1206.
- [2] Ford L. R., Fulkerson D. R., Maximal flow through a network, *Canadian J. of Math.*, **8** (1956), стр. 399.
- [3] Ford L. R., Fulkerson D. R., Dynamic Network Flow, Rand Corp. paper, P-967, 1956.
- [4] Gale D., A theorem on flows in networks, *Pacific J. of Math.*, **7** (1957), стр. 1073.
- [5] Hoffman A. J., Kuhn H. W., On systems of distinct representatives (Linear inequalities and related systems), *Ann. of Math. Studies*, **38** (1956), стр. 199; есть русский перевод: Гофман А. Дж., Кун Г. У., О системах различных представителей, сб. Линейные неравенства, ИЛ, М., 1959.
- [6] Kreweras G., Extension d'un théorème sur les répartitions en classes, *C. R. Acad. Sciences*, **222** (1946), стр. 431.
- [7] Marczewski J., Guilhaud G. T., Essai d'analyse graphique d'une comptabilité nationale, *Économie appliquée*, **2** (1949), стр. 138.

Гл. 9. Теорема о полустепенях

- [1] Gale D., A theorem on flows in network, *Pacif. J. of Math.*, 7 (1957), стр. 1073.
- [2] Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г., Неравенства, ИЛ, М., 1948.
- [3] Muirhead R. F., Some methods applicable to identities and inequalities of symmetric algebraic functions of n letters, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 21 (1903), стр. 144.
- *[4] Ryser H. J., Combinatorial properties of matrices of zeros and ones, *Canad. J. Math.*, 9, № 3 (1957), стр. 371.

Гл. 10. Паросочетание простого графа

- [1] Berge C., Sur la déficience d'un réseau infini, *C. R. Acad. Sciences*, 245 (1957), стр. 1206.
- [2] Birkhoff G., Tres observaciones sobre el algebra lineal, *Rev Univ. nac. Tucuman, Série A*, 6 (1941), стр. 147.
- [3] Ergévary J., Matrixok kombinatorius tulajdonsagairol, *Mat. Fiz. Lapok*, 1931, стр. 16.
- [4] Hall P., On representations of subsets, *J. London Math. Soc.*, 10 (1934), стр. 26.
- [5] Halmos P. R., Vaughan H. E., The marriage problem, *Am. J. of Math.*, 72 (1950), стр. 26.
- [6] König D., Valko S., Über mehrdeutige Abbildungen von Mengen, *Math. Ann.*, 95 (1926), стр. 135.
- [7] Kuhn H. W., The Hungarian Method for the assignment problem, *Naval research Quaterly*, 2 (1953), стр. 83.
- [8] Mann H. B., Ryser H. J., Systems of distinct representatives, *Am. Math. Monthly*, 60 (1953), стр. 397.
- [9] Ore O., Graphs and matching theorems, *Duke Math. J.*, 22 (1955), стр. 625.
- [10] Rado R., Factorization of even graphs, *Quat. J. of Math.*, 20 (1949), стр. 95.

Гл. 11. Факторы

- [1] Ahrens W., Mathematische Unterhaltungen und Spiele, Berlin 1910, стр. 319.
- [2] Dirac G. A., The structure of k -chromatic graphs, *Fund. Math.*, 40 (1953), стр. 50.
- [3] Euler, Commentationes Arithmeticae Collectae, St. Peterburg, 1766, стр. 337.
- [4] Flye Sainte-Marie, Note sur un problème relatif à la marche du cavalier sur l'échiquier, *Bull. Soc. Math. de France*, 5 (1876), стр. 144.
- [5] Johnson S., Optimal 2 and 3-stage production schedules with set up times included, *Naval Res. Quaterly*, 1954.
- [6] Kraitichik M., La Mathématique des jeux, Bruxelles, 1930, стр. 357.
- [7] Ringel G., Über drei kombinatorische Probleme am n -dim. Würfel und Würfelgitter, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 20 (1955), стр. 10.
- [8] Sainte-Laguë A., Avec des nombres et des lignes, Paris, 1943 (Vuibert, éd.), стр. 291.

Гл. 13. Диаметр сильно связного графа

- [1] Bratton D., Efficient communication Networks, *Cowles Comm. Disc. Paper*, 2119 (1955).
- [2] Christie L. S., Luce R. D., Macy J., Communication and Learning in a taskoriented group, *M. I. T. Res. Lab. of electr. technical Report*, 231 (1952), стр. 238.
- [3] Radner R., Titter A., Communication in Networks, *Cowles Comm. paper*, 2098 (1954).
- [4] Roy B., Sur quelques propriétés des graphes fortement connexes, *C. R. Acad. Sciences*, 247, № 4 (1958), стр. 399.

Гл. 14. Матрица смежности графа

- [1] Katz L., An application of matrix algebra to the study of human relations, mimeo., *Univ. of North Carolina*, 1950.
- [2] Kendall M. D., Rank Correlation methods, Londres 1948 (Griffin, éd.),—Further contributions to the theory of paired comparisons, *Biometrics*, 2 (1955), стр. 43.
- [3] Lévi-Strauss C., Les structures élémentaires de la parenté, Paris, 1949 (Presses universitaires)
- [4] Luce R. D., Perry A. D., A method of matrix analysis of group structure, *Psychometrika*, 14 (1949), стр. 95.
- [5] Luce R. D., A note on Boolean matrix theory, *Proc. Am. Math. Soc.*, 3 (1952), стр. 382.
- [6] Moreno J. L., Fondaments de la Sociométrie (trad. Lesage-Maucorps), Paris, 1954 (Presses universitaires).
- [7] Ross I. C., Harary F., On the determination of redundancies in sociometric chains, *Psychometrika*, 17 (1952), стр. 195.
- [8] Wei T. H., The algebraic foundations of ranking theory, thèse, Cambridge, 1952.

Гл. 15. Матрицы инцидентий

- [1] Chuard J., Questions d'analysis situs, *Rend. Circ. Palermo*, 46 (1922), стр. 185.
- [2] Heller I., Tompkins C. B., An extension of a theorem of Dantzig's, *Ann. of math. studies*, 38 (1956), стр. 247; Хеллер И., Томпкинс Ч. Б., Обобщение одной теории Данцига, сб. Линейные неравенства, ИЛ, М., 1949.
- [3] Hoffman A. J., Kruskal J. B., Integral boundary points of convex polyhedra, *Ann. of Math. Studies*, 38 (1956), стр. 223; есть русский перевод: Гофман А. Дж., Краскал Дж. Б., Целочисленные граничные точки выпуклых многогранников, сб. Линейные неравенства, ИЛ, М., 1959.
- [4] Kirchhoff G., *Poggendorf Annalen*, 72 (1847), стр. 497.

- [5] Okada S., Algebraic and topological foundations of network synthesis, Proc. Symp. on Modern Network synthesis, New York, 1955, стр. 283.
- [6] Poincaré H., Complément à l'analysis situs, *Rend. Circ. Palermo*, **13** (1899), стр. 285.
- [7] Veblen O., Alexander J. W., Manifolds of n dimensions, *Ann. of Math.*, **14** (1913), стр. 163.
- *[8] Кудрявцев Л. Д., О некоторых математических вопросах теории электрических цепей, *Успехи матем. наук*, **3**, № 4 (1948), стр. 80.

*Дополнительная литература к гл. 14 и 15

- [1] Лихтенбаум Л. М., Характеристические числа неособенного графа, Труды 3-го Всес. матем. съезда, том. 1, 1956, стр. 135.
- [2] Лихтенбаум Л. М., Теорема двойственности для неособенных графов, *Усп. матем. наук*, **13**, № 5 (1958), стр. 185.
- [3] Лихтенбаум Л. М., Следы степеней матриц соседства вершин и ребер неособенного графа, *Изв. высш. учебн заведений, математика*, **5** (1959), стр. 154.
- [4] Лихтенбаум Л. М., Новые теоремы о графах (печатается в *Сибирском математическом журнале*).
- [5] Collatz L., Sinogowitz U., Spektren endlicher Grafen, *Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg*, **21**, № 1—2 (1957), стр. 63.

Гл. 16. Деревья и прадеревья

- [1] van Aardenne-Ehrenfest T., de Bruijn N. G., Circuits and trees in oriented linear graphs, *Simon Stevin*, **28** (1951), стр. 203.
- [2] Bott R., Mayberry J. P., Matrices and trees, Economic Activity analysis, New York 1954 (Wiley, ed.), стр. 391.
- [3] Cayley A., Collected mathematical papers, Cambridge, **3**, стр. 242, **13**, стр. 26, и т. д.
- [4] Jordan C., Sur les assemblages de lignes, *J. für die reine und angew. Math.*, **70** (1869), стр. 185.
- [5] Kelly P. J., A congruence theorem for trees, *Pacific J. of Math.*, **7** (1957), стр. 961.
- [6] Kruskal J. B., On the shortest spanning subtree of a graph, *Proc. Am. Math. Soc.*, **7** (1956), стр. 48.
- [7] de Polignac C., Théorie des ramifications, *Bull. Soc. Math. France*, **8** (1880), стр. 120.
- [8] Trent H. M., A note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph, *Proc. Nat. Ac. Sciences*, **40** (1954), 1004.
- *[9] Weinberg L., Number of trees in a graph, *Proc. I. R. E.*, **46**, № 12 (1958), стр. 1954.
- *[10] Tutte W. T., A contribution to the theory of chromatic polynomials, *Canad. J. Math.*, **6**, № 1 (1954), стр. 80.

Гл. 17. Задача Эйлера

- [1] van Aardenne-Ehrenfest T., de Bruijn N. G., Circuits and trees in oriented linear graphs, *Simon Stevin* **28** (1951), стр. 203.
- [2] de Bruijn N. G., A combinatorial problem, *Proc. Nederl. Akad. Wetensch.*, **49** (1946), стр. 758.
- [3] Good I. J., Normal recurring decimals, *Bull. Am. Math. Soc.*, **40** (1947), 859.
- [4] Martin M. H., A problem in arrangements, *Bull. Am. Math. Soc.*, **40** (1934), стр. 859.
- [5] Amitsur A. S., Levitzki J., *Proc. Am. Math. Soc.*, **1** (1950), стр. 449.

Гл. 18. Паросочетание произвольного графа

- [1] Berge C., Two theorems in graph theory, *Proc. Nat. Ac. Sciences*, **43** (1957), стр. 842.
- [2] Berge C., Sur le couplage maximum d'un graphe, *C. R. Acad. Sciences*, **247** (1958), стр. 258.
- [3] Gallai T., On factorisation of graphs, *Acta Math. Hungaricae*, **1** (1950), стр. 133.
- [4] Maunsell F. G., A note on Tutte's paper, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), стр. 127.
- [5] Norman R. Z., Rabin M. O., An algorithm for a minimum cover of a graph (abstract), *Noties of the Am. Math. Soc.*, **5**, février (1958), стр. 36.
- [6] Petersen J., Die Theorie der regulären Graphen, *Acta, Math.*, **15** (1891) стр. 193.
- [7] Roth J. P., Combinatorial topological methods in the synthesis of switching circuits, *I. B. M. Res. Report*, RC-11, Poughkeepsie, 1957.
- [8] Tutte W. T., The factorisation of linear graphs, *J. London Math. Soc.*, **22** (1947), стр. 107.
- *[9] Зыков А. А., Функции от графов, определяемые линейными уравнениями, *Изв. Сиб. отд. АН СССР*, **5** (1959), стр. 3; **9** (1960), стр. 17; **12** (1960), стр. 13

Гл. 19. Фактороиды

- [1] Baebler F., Über die Zerlegung regulären Streckenkomplexe ungerader Ordnung, *Comment. Math. Helvetici*, **10** (1938), стр. 275.
- [2] Belck H. B., Reguläre Faktoren von Graphen, *J. Reine Angew. Math.*, **188** (1950), стр. 228.
- [3] Sainte-Laguë A., Les réseaux unicursaux et bicursaux, *C. R. Acad. Sciences*, **182** (1926), стр. 747.
- [4] Tutte W. T., The factors of graphs, *Canad. J. of Math.*, **4** (1957), стр. 314. A short proof of the factor theorem for finite graphs, *Canad. J. of Math.*, **6** (1954), стр. 347.
- [5] Tutte W. T., On hamiltonian circuits, *London Math. Soc. J.*, **21** (1946), стр. 99.

- *[6] Wagner K., Faktorklassen in Graphen, *Math. Ann.*, **141**, № 1 (1960), стр. 49.

Гл. 20. Связность графа

- [1] Dirac G. A., The structure of k -chromatic graphs, *Fund. Math.*, **40** (1953), стр. 42. — Some theorems on abstract graphs, *Proc. London Math. Soc.*, **2** (1952), стр. 69.
- [2] Hajós G., Zum mengerschen Graphensatz, *Acta litt. ac. Sc. (Math.)*, **7** (1934), стр. 44.
- [3] Kelly J. B., Kelly L. M., Paths and circuits in critical graphs, *Am. J. of Math.*, **76** (1954), стр. 790.
- [4] Menger K., Zur allgemeinen Kurventheorie, *Fund. Math.*, **10** (1926), стр. 96.
- [5] Whitney H., Non separable and planar graphs, *Trans. Am. Math. Soc.*, **34** (1932), стр. 339. — Congruent graphs and the connectivity of graphs, *Am. J. of Math.*, **54** (1932), стр. 150.

Гл. 21. Плоские графы

- [1] Dirac G. A., Map colour theorems related to the Heawood colour formula, *J. London Math. Soc.*, **31** (1956), стр. 460.
- [2] Dirac G. A., Schuster S., A theorem of Kuratowski, *Proc. of the Nederl. Ak. W.*, **57** (1954), стр. 343.
- [3] Errera J., Du coloriage des cartes, thèse, Bruxelles, 1921; *Mathesis*, **36** (1922), стр. 56.
- [4] Kuratowski G., Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.*, **15—16** (1930), стр. 271.
- [5] Ringel G., Bestimmung der Maximalzahl der Nachbargebiete auf nichtorientierbaren Flächen, *Math. Ann.*, **127** (1954), стр. 181.
- [6] Ringel G., Farbensatz für orientierbare Flächen vom Geschlechte $p > 0$, *J. Reine Angew. Math.*, **193**, № 1/2 (1954), стр. 11.
- [7] Tait P. G., Note on a theorem in geometry of position, *Trans. Royal Soc. of Edinburgh*, **29** (1880), стр. 657.
- [8] Whitney H., Planar graphs, *Fund. Math.*, **21** (1933), стр. 73.
- [9] Whitney H., Congruent graphs, and the connectivity of graphs, *Am. J. of Math.*, **54** (1932), стр. 150.
- *[10] Coxeter H. S. M., Map-colouring problems, *Scripta Math.*, **23**, № 1—4 (1958), стр. 11.
- *[11] Ringel G., Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen, Berlin, V. E. B. Dtschl. Verl. Wiss., 1959, 132 S., ill.

Добавление I. Об общей теории игр

- [1] Berge C., Théorie générale des jeux à n personnes, *Mém. des Sc. Math.*, **138**, Paris (1957). Есть русский перевод (см. стр. 295).
- [2] Kuhn H., Extensive games and the problem of information, *Ann. of Math. St.*, **28**, Princeton, 1953, стр. 193.

- [3] Ville J., *Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications* (E. Borel), 4, Paris, 1938, стр. 105.

Добавление II. О транспортных задачах

- [1] Appell A., Le problème géométrique des déblais et remblais, *Mém. des Sciences Math.*, 27, Paris, 1928 (Gauthier-Villars, éd.).
- [2] Cahn A. S., The Warehouse Problem, *Bull. A. M. S.*, 54 (1948), стр. 1073
- [3] Dantzig G. B., Application of the simplex method to a transportation problem, *Activity Analysis, Cowles Com. Monograph*, 13, New York, 1951 (Wiley and Sons, ed.).
- [4] Flood M. M., On the Hitchcock distribution problem, *Pacific J. of Math.*, 3 (1953), стр. 369.
- [5] Ford L. R., Fulkerson D. R., Solving the transportation problem, *Management Sci.*, 3 (1956), стр. 24; A primal dual algorithm for the capacited Hitchcock problem, *Rand Res. Mem.* P-827, Santa-Monica, 1956.
- [6] Fulkerson D. R., Hitchcock transportation problem, *Rand paper*, P-890, Santa-Monica, 1956.
- [7] Hitchcock F. L., The distribution of a product from several sources to numerous localities, *J. Math. Phys.*, 20 (1941), стр. 224.
- [8] Канторович Л. В., О транслкации масс, *ДАН СССР*, 37 (1942), стр. 99.
- [9] Koopmans T. C., Reiter S., A model of transportation, *Activity Analysis, Cowles Com. Monograph*, 13, New York, 1951 (Wiley and Sons, ed.), стр. 222.
- [10] Kuhn H. W., The Hungarian method for the assignment problem, *Naval Res. Quat.*, 2 (1955).
- [11] Monge, Déblai et remblai, *Memoires de l'Ac. des Sci.*, 1781.
- [12] Orden A., The transshipment problem, *Management Sci.*, 2 (1956).
- [13] Votaw D. F., Orden A., The personnel assignment problem, *Scoop Symposium on Linear Inequalities and Programming*, Washington, 1952, стр. 155.

Добавление III. Об использовании понятия потенциала в транспортных сетях

- [1] d'Auriac A., A propos de l'unicité de solution dans les problèmes de réseaux maillés, *La Houille Blanche*, 2 (1947), стр. 209.
- [2] Brooks R. L., Smith C. A. B., Stone A. H., Tutte W. T., The dissection of rectangles into squares, *Duke Math. J.*, 7 (1940), стр. 312.
- [3] Duffin R. J., Non liner networks II, *Bull. A. M. S.*, 53 (1947) стр. 963.
- [4] Koopmans T. C., Reiter S., A model of transportation, *Activity Analysis of Production and Allocation*, 2-d ed., стр. 222, New York.
- [5] Parodi M., Sur l'existence des réseaux électriques, *C. R. Acad. Sc.*, 223 (1946), стр. 23.
- [6] Sprague R., Zur Abschätzung der Mindestzahl inkongruenter quadrate, *Math. Zeit.*, 46 (1940), стр. 460.

- [7] T a u s s k y O., A recurring theorem on determinants, *Am. Math. Monthly*, **56** (1949), стр. 672.
- [8] L e C o r b e i l l e r P., Analyse matricielle des réseaux électriques (Dinod, éd), стр. 33.

Добавление IV. Нерешенные задачи и недоказанные предположения

- [1] H a n a n i H., On Steiner's triples and quadruples, Abstr. Short commun. Intern. Congress Math. in Edinburgh, Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, стр. 29—30.
- [2] T h o m p s o n L. L., Lectures on Game Theory, Markov Chains and related Topics, Sandia Corp. Monograph, 1958.

Добавление V. О некоторых основных принципах подсчета

(Ж. Рице)

Для справок

- [1] D a v i s, The number of structures of finite relations, *Proc. A. M. S.*, 1953, стр. 486.
- [2] F o r d G. W., H a r a r y F., N o r m a n R. Z., U h l e n b e c k G. E., Combinatorial problems in the theory of graphs, *Proc. Nat. Ac. Sc.*, **42** (1956), стр. 122; **42** (1956), стр. 203; **42** (1956), стр. 529; **43** (1957), стр. 163.
- [3] F o r s t e r R. M., The number of series-parallels networks, *Proc. Int. Congres of Math.*, 1950, стр. 646.
- [4] H a r a r y F., Note on the Polyà and Otter formulas for enumerating trees, *Michigan Math. J.*, **3** (1955), стр. 109; The number of dissimilar super-graphs of a linear graph, *Pacific J. of Math.*, **7** (1957), стр. 903; The number of linear directed rooted and connected graphs, *Trans. A. M. S.*, **78** (1955), стр. 445.
- [5] H a r a r y F., N o r m a n R. Z., Theory of Graphs (à paraître); The dissimilarity characteristic of linear graphs, *Proc. A. M. S.*, **5** (1954), стр. 131; The dissimilarity characteristic of Husimi trees, *Ann. of Math.*, **58** (1953), стр. 134.
- [6] O t t e r R., The number of trees, *Ann. of Math.*, **49** (1948), стр. 583.
- [7] P o l y a G., Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, *Acta Math.*, **68** (1937), стр. 145.

Для дополнительных задач и справок

- [1] I z b i c k i H., Reguläre Graphen 3, 4 und 5 Grades mit vorgegebenen abstrakten Automorphismengruppen, Farbenzahlen und Zusammenhängen, *Monat. für Math.*, **61** (1957), стр. 42
- [2] R i o r d a n J., Introduction to combinatorial analysis (Wiley), New York, 1958; русский перевод: Р и о р д а н Дж., Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, М. (в печати).
- [3] S a b i d u s s i G., Graphs with given group and given graph-theoretical properties, *Canad. J., Math.*, **9** (1957), стр. 515.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ И КНИГА К. БЕРЖА (ПОСЛЕСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ)

В самых различных областях человеческой деятельности нередко возникают математические задачи комбинаторного характера, приводящие к исследованию *графов*. Наиболее старые задачи на графы, насчитывающие столетнюю и даже двухсотлетнюю давность, обычно оформлялись как чисто развлекательные (кенигсбергские мосты, расстановка ферзей, ход коня, прогулки девушек и т. п.), но к началу XX века в этой области появилось немало задач, имеющих теоретический и практический интерес. Так, если знаменитая проблема четырех красок, предложенная Кэли членам Лондонского Географического Общества в 1879 году, едва ли актуальна для географии (да и сама математика от попыток решения этой проблемы обогатилась тогда гораздо меньше, чем, например, от попыток доказательства Великой Теоремы Ферма), то важность задачи о подсчете числа изомеров химических соединений или задачи о выделении наименьшей совокупности контуров электрической сети для составления полной системы уравнений Кирхгофа не вызывает сомнений.

В XX веке вопросы, прямо или косвенно связанные с графами, стали возникать в большом количестве не только в химии, физике, электротехнике, биологии, социологии и т. д., но и в таких областях чистой математики, как алгебра, топология, теория множеств. Графы фигурировали в самых различных представлениях и под разными названиями: карта, лабиринт, схема, сеть, диаграмма, комплекс, дискретное пространство в смысле Линфилда и др. Термин „граф“ стал общепринятым после выхода в свет в 1936 г. монографии Кёнига (см. [3] к гл. I), где представлен значительный материал и где графы рассматриваются в абстрактной форме как самостоятельные математические объекты. В книге имеются наряду с тривиальными интересные и глубокие теоремы, изучаются не только конечные, но также и бесконечные графы, однако название „Теория графов“ было тогда, пожалуй, несколько преждевременным, ибо в этой области не существовало сколько-нибудь общих методов и для решения каждой задачи использовалось свое особое рассуждение, основанное либо на переборе случаев, в отдельности не интересных, либо на идее, заимствованной из других областей математики.

Цельное и оригинальное направление в теории графов открывается в 1937 г. фундаментальной работой Пойа (см. [7] к Доба-

влению V). Основная теорема этой работы, опирающаяся на весьма простые понятия производящей функции, считающего ряда и циклического индекса группы подстановок, дает общий метод подсчета количеств различных графов с теми или иными свойствами. Во многих конкретных случаях этот метод весьма эффективен, и сам Пойа применил его для определения числа изомеров в химии, а впоследствии появились десятки работ Харари, Нормана, Уленбека, Риордана, Рида и других авторов, посвященных математическим и физическим приложениям.

Другим важным общим методом в теории графов следует считать геометрическую теорию транспортных сетей, созданную в 1956—1957 гг. Фордом, Фалкерсоном и Гейлом. Эта теория позволяет решать не только „собственно транспортные“, но и многие другие прикладные и даже чисто математические задачи, в том числе из самой теории графов. Простой и наглядный алгоритм нахождения наибольшего потока по сети с заданными пропускными способностями звеньев настолько эффективен, что для сетей с сотнями вершин и тысячами дуг легко осуществляется „вручную“, без обращения к быстродействующим вычислительным машинам. В то же время к задаче о наибольшем потоке сводятся многие (жаль, что не все!) линейные программы, причем не возникает никаких усложнений в тех случаях, когда искомое решение должно быть целочисленным.

Еще одним общим методом, объединившим целый ряд разнородных задач и позволяющим эффективно решать многие из них, является теория чередующихся цепей с основанным на ней „венгерским алгоритмом“. Будучи заложен Эрговари еще в тридцатых годах, этот метод получил дальнейшее мощное развитие четверть века спустя в работах Галлаи, Куна, Бержа, Нормана и Рэйбина. С помощью метода чередующихся цепей можно, в частности, находить наибольшее внутренне устойчивое множество, а также наибольшее паросочетание в заданном графе; обе эти задачи играют важную роль в теории информации, теории автоматических устройств и при решении сугубо практической задачи о наилучшей раскраске проводников в сложных электрических схемах.

Упомянем также о предпринятой переводчиком попытке систематического изучения рекуррентных свойств графов (см. [9] к гл. 18 и [8] к гл. 4). Речь идет о функциях $\Phi(G)$, определяемых уравнениями вида

$$\Phi(G) = f(\Phi(G_1), \Phi(G_2), \dots, \Phi(G_n)),$$

где G_1, G_2, \dots, G_n — графы, получаемые из исходного графа G применением некоторой операции Γ и в каком-то смысле более простые, чем G . Для некоторых типов операций Γ удастся исследовать соответствующие функции Φ единым методом. Таким путем выведено, в частности, несколько новых соотношений между различными числовыми характеристиками графов.

Наряду с общими методами в теории графов имеются „очаги конденсации“ в виде отдельных трудных проблем.

Очень много исследований посвящено классической проблеме четырех красок. Наиболее интересные результаты, относящиеся как к самой проблеме, так и к различным ее обобщениям, можно разделить на две группы. Первую группу составляют критерии и признаки, позволяющие по чисто комбинаторным свойствам абстрактного графа судить о возможности реализации его в виде плоского топологического комплекса (или, в более общем случае, о возможности вложения его в поверхность с заданными топологическими свойствами); сюда относится, например, теорема Понтрягина — Куратовского. Задачи этой группы в настоящее время важны в связи с техникой печатных электрических схем, но, к сожалению, удобных алгоритмов для их массового решения пока нет. Ко второй группе относятся исследования графов в связи с их хроматическими свойствами (хроматическое число; количество способов разбиения на заданное число внутренне устойчивых множеств). Во многих работах (Г. Дирак, Дж. Келли, Л. Келли и др.) изучается структура „критических“ графов, т. е. таких, что сами они не допускают разбиения на заданное число внутренне устойчивых множеств, но все графы, получаемые из них удалением любой вершины (или любого ребра), допускают такие разбиения. Наконец, в программировании сейчас остро стоит проблема построения удобного алгоритма (который был бы существенно проще перебора) для нахождения хроматического числа графа с большим количеством вершин и ребер; она возникла в связи с задачей наиболее экономного использования ячеек памяти машины.

В случаях когда для нахождения и полного исследования той или иной числовой функции от графа нет удобных способов, на практике часто пользуются различными оценками и асимптотическими характеристиками этой функции. Вопросам такого рода посвящены работы Пойа, Шеннона, Джилберта, Г. Н. Поварова, О. Б. Лупанова, Р. Е. Кричевского, Ф. Я. Ветухновского, Б. А. Трахтенброта, А. П. Ершова, Г. И. Кожухина и других авторов.

Знаменитая задача Эйлера о кенигсбергских мостах оказалась связанной с рядом интересных проблем (нахождение факторов, гамилтоновых путей и циклов и т. д., а в более общем случае — нахождение в заданном графе подграфов того или иного вида); эти проблемы имеют приложения в физике, химии, биологии, исследовании операций, теории игр и даже в некоторых вопросах теории чисел.

Интересной характеристикой графа, обобщающей свойства симметрии в самых различных смыслах, является группа его автоморфизмов (взаимно однозначных преобразований множества вершин на себя, сохраняющих бинарное отношение этого графа); в частности, автоморфизмы графов тесно связаны с задачами подсчета, решаемыми на основе теоремы Пойа. И здесь получен ряд отдельных результатов (Сабидусси, Фрухт, Избицкий и др.). Вообще имеется очень

много самых различных характеристик графа, важных в том или ином отношении и изучаемых в литературе: радиус и диаметр, цикломатическое число, „сила“ связности (наименьшее число вершин, после удаления которых граф перестает быть связным) и др.

Значительная литература посвящена графам того или иного специального вида. Так, систематическое изучение деревьев, начатое еще Кэли, продолжается и сейчас (Оттер, П. Келли, Андреоли, Краскал и др.); большой интерес проявляется к однородным графам и плоским графам (Уитни, Биркгоф, Льюс, Грецш). Проблема синтеза, т. е. построения графа с наперед заданными свойствами, является одной из центральных в теории графов, а ее прикладное значение, например, для синтеза автоматических устройств очевидно; к сожалению, никакого общего подхода к этой проблеме пока нет, а связанные с ней вопросы (теоремы существования и единственности, удобные алгоритмы построения и преобразования графов с заданными свойствами) решены лишь в некоторых весьма частных случаях.

Отметим, наконец, что сам язык теории графов делает изложение ряда дисциплин, могущих развиваться и без нее, более удобным и наглядным. Таковы, например, теория игр, математическая лингвистика, некоторые разделы математической экономики, теория алгоритмов (определение алгоритма по А. Н. Колмогорову и В. А. Успенскому, граф-схема Л. А. Калужнина), а в особенности теория электрических сетей (см., например, [8] к гл. 15), изложение которой без понятия „граф“ было бы противоестественным.

Этот не претендующий на полноту перечень общих методов и отдельных проблем теории графов показывает, что теперь в ее лице мы действительно имеем дело с теорией, которая интересна сама по себе и имеет разнообразные и многочисленные приложения. Особенно велик к ней интерес у лиц, занимающихся кибернетикой и разработкой новых вычислительных устройств. Однако до 1958 г. в литературе не было сколько-нибудь полного и систематического изложения теории графов, если не считать ныне уже устаревшей книги Кёнига. Поэтому выход в свет монографии К. Бержа и перевод ее на русский язык имеет большое значение, несмотря на то что и в этой книге современная теория графов представлена далеко не полностью.

Из общих методов теории графов в книге подробно излагаются и неоднократно используются два: теория транспортных сетей и теория чередующихся цепей. К сожалению, метод Пойа, который мог бы составить прекрасную главу, дан только в добавлении и без всяких приложений; этот пробел в нашей литературе будет восполнен готовящимся к печати переводом на русский язык монографии Риордана (Riordan J., *An introduction to combinational analysis*, New York — London, 1958).

Из отдельных проблем, перечисленных нами, в книге затронуты в той или иной степени почти все; ничего не сказано лишь о группе

автоморфизмов графа, об асимптотических характеристиках графов и о критических хроматических графах. Много внимания уделено понятиям, важным для теории игр (функция Гранди, ядро, сумма и произведение графов и др.), и изложению самой теории игр на основе теории графов. Остальные приложения даются в виде отдельных примеров, нередко забавного содержания, но таких, что вдумчивый читатель сумеет придать многим из них другое, отнюдь не развлекательное толкование.

В подлиннике имелись опечатки, неточные формулировки и некорректные доказательства; внося при переводе исправления, мы, как правило, не снабжали их примечаниями. Значительную помощь при обнаружении неточностей оказали переводчику участники семинара по теории графов в Институте математики Сибирского отделения Академии наук СССР; среди них в первую очередь хочется поблагодарить Л. В. Канторовича, А. И. Фета, В. Г. Визинга, А. А. Берса, М. И. Кратко и Н. М. Сычеву. Ряд исправлений сделан редактором перевода И. А. Вайнштейном.

А. А. Зыков

УКАЗАТЕЛЬ СИМВОЛОВ

(X, Y обозначают множества; A, B — подмножества X ; x, y, z — элементы множества X ; Γ, Δ — многозначные отображения; k — целое число > 0)

$a \in X, x \notin X$ 7

$A \subset B, A = B$ 7

$A \subset \subset B$ 8

$A \cap B, A \cup B, A \times B, A \setminus B$ 8

$\bigcup A_k, \bigcap A_k, \coprod A_k$ 8

φ_A 55

$|A|$ 23

\mathbf{R}, \mathbf{R}^k 9

\emptyset 7

$a_N^M = (a_j^i)$ 170

$[k]_{(2)}$ 31

$k \dot{+} k'$ 31

$\omega \dot{+} k$ 27

$\Gamma A, \hat{\Gamma}, \Gamma^{-1}, \Gamma \Delta$ 10

Γ_A 12

$u = (x, y)$ 12

U 12

U_A^+, U_A^-, U_A 13

U_x^+, U_x^- 82

$\mu = (u_1, u_2, \dots) = [x, y, \dots, z]$ 13

$l(\mu), \mu[x, z]$ 13

$u = [x, y], U$ 15

U_x 165

$\mu, -\mu, \mu' + \mu''$ 35

$x \leq y, x < y, x \equiv y$ 11

$G(X, \Gamma) = (X, U)$ 12

$G = (X, Y, \Gamma)$ 104

$\overline{G}(\mathbf{W})$ 190

G^* 235

$G \times G', G + G'$ 30

$\rho(G), \vee(G)$ 34

$\gamma(G)$ 38

$d(G)$ 43

$\alpha(G)$ 47

$\beta(G)$ 49

$\omega(G)$ 222

$\rho(G)$ 132

$\delta(G)$ 138

$d(x, y), e(x)$ 131

$d^+(x), d^-(x)$ 98

$\mathbf{d}(x, y), \mathbf{d}(x)$ 215

$d_x(U)$ 189

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аарден-Эренфест (van Aardene-Eh-
 genfest T.) 183
 Адамар (Hadamard J.) 146
 Адамс (Adams E. W.) 67
 Айзекс (Isaacs R.) 62
 Александер (Alexander F. W.) 160
 Амицур (Amitsur A. S.) 185
 Аппель (Appel P.) 250

 Беблер (Baebler F.) 206
 Беллман (Bellman R.) 79
 Бенсон (Benson D. C.) 67
 Берж (Berge C.) 53, 115, 190, 195—
 197, 201
 Бернштейн (Bernstein F.) 115, 117
 Бёрч (Birch) 246
 Бинэ (Binet) 170
 Биркгоф (Birkhoff G.) 118, 119
 Борель (Borel E.) 246
 Ботт (Bott R.) 176, 177
 де Брёйн (de Bruijn N. G.) 183
 Брукс (Brooks R. L.) 263
 Брэттон (Bratton P.) 137, 140, 141,
 272

 Вандермонд (Vandermonde) 122
 Веблен (Veblen O.) 166
 Вото (Votaw D. F.) 252

 Галлаи (Gallai T.) 188, 196
 Гамильтон (Hamilton W.) 120, 121
 Гаусс (Gauss K. F.) 43
 Гейл (Gale D.) 92, 100
 Гильберт (Hilbert D.) 206 239
 Гильбо (Guilbaud G. T.) 53
 Гомори (Gomory R. E.) 42, 190
 Гофман (Hoffman A. F.) 89, 93, 159
 Гранди (Grundy P. M.) 23, 29—33,
 38, 40, 42, 59—65, 207, 271

 Данциг (Dantzig G. B.) 42, 255
 Даффин (Duffin) 265

 Джонсон (Johnson S.) 123
 Дирак (Dirac G. A.) 217
 Дирихле (Dirichlet L.) 262, 264, 265
 Дынкин Е. Б. 235

 Жордан (Jordan C.) 216

 Калмар (Kalmar F.) 70
 Кан (Kahn A. S.) 253
 Канторович Л. В. 250
 Кендалл (Kendall) 273
 Кёниг (König D.) 24, 39, 104, 111,
 112, 114, 115, 118, 123, 124
 Киркман (Kirkman) 204
 Коксетер (Coxeter H. S. M.) 240
 Кон-Фоссен (Kon-Vossen S.) 239
 Коши (Cauchy O.) 170
 Краскал (Kruskal J. B.) 159, 167
 Креверас (Kreweras G.) 273
 Кристи (Christie L. S.) 135
 Крон (Kron) 265
 Куайн (Quine) 193
 Кун (Kuhn W. H.) 70, 89, 112, 246,
 247, 255
 Купманс (Koopmans T. C.) 250, 266,
 269
 Куратовский (Kuratowski G.) 231
 Кэли (Cailey A.) 44

 Лаплас (Laplace P.) 170
 Левицкий (Levitzki I.) 185
 Лефшец (Lefschetz S.) 238
 Литтлвуд (Littlewood J. E.) 100
 Лихтенбаум Л. М. 144
 Лукасевич (Lukasiewicz J.) 174
 Льюс (Luce R. D.) 135, 139
 Люка (Lucas E.) 75, 195, 205

 Мейберри (Mayberry J. P.) 177
 Мейси (Macy J.) 135
 Менгер (Menger K.) 217, 224

Менделеев Д. И. 34
 Монж (Monge G.) 250, 251
 Моргенштерн (Morgenstern O.) 53
 Морено (Moreno J. L.) 147
 Морон (Moron) 262
 Муавр (de Moivre) 122
 Мур (Moore E. H.) 64, 270

Нейман (Neumann) 262, 264, 265
 фон Нейман (J. von Neumann) 53,
 70, 119, 246, 247
 Норман (Norman R. Z.) 190, 192,
 195, 196
 Нэш (Nash) 246, 247

Окада (Okada S.) 162
 Орден (Orden A.) 252
 Оре (Ore O.) 111

Перрон (Perron O.) 150
 Петерсен (Petersen J.) 188, 196, 206,
 209
 Поля (Polia G.) 34, 100, 280
 Понтрягин Л. С. 231
 Постумус (Posthumus) 182
 Пуанкаре (Poincaré H.) 160

Радó (Rado O.) 25, 59, 290
 Райзер (Ryser H. J.) 100
 Рейсс (Reiss M.) 270
 Рейтер (Reiter S.) 269
 Риге (Riquet J.) 275
 Рингель (Ringel G.) 105, 240
 Ричардсон (Richardson M.) 56, 59
 Рот (Roth J. P.) 193
 Руа (Roy B.) 135
 Рэйбин (Rabin M. O.) 190, 195, 196

Сильвестр (Silvestre) 270
 Смит (Smith C. A. B.) 210, 263
 Спраг (Sprague R.) 263
 Стоун (Stone A. H.) 263

Тарри (Tarry G.) 77
 Татт (Tutte W. T.) 176, 197, 198, 213,
 214, 263
 Таусски (Tausky O.) 265
 Томпсон (Thompson G. L.) 273
 Трент (Trent H. M.) 172
 Тэт (Tait P. G.) 238, 273

Уитни (Whitney H.) 224, 236
 Успенский В. А. 235
 Уэй (Wei T. H.) 149, 273

Фалкерсон (Fulkerson D. R.) 85—87,
 89, 105, 255, 257
 Фишер (Fisher R. A.) 89
 Флёр (Fleury) 181
 Флад (Flood M. M.) 255
 Форд (Ford L. R.) 79, 85, 86, 87, 89,
 105, 255, 257
 Фробениус (Frobenius) 150

Хадвигер (Hadviger) 274
 Ханани (Hanani) 271
 Харди (Hardy G. H.) 100
 Хеллер (Heller J.) 156
 Хедвуд (Headwood) 239, 240
 Хефтер (Heffter) 240
 Хичкок (Hitchcock F. L.) 250, 251
 Холл (Hall P.) 104, 115, 118, 124

Цермело (Zermelo E.) 70
 Цорн (Zorn) 20, 21

Шеннон (Shannon C. E.) 46—48, 271
 Штейнер (Steiner J.) 270
 Шютценбергер (Schützenberger M. P.)
 184, 271

Эйлер (Euler L.) 107, 122, 179, 228,
 229
 Эрговари (Ergévary J.) 112
 Эррера (Errera J.) 199, 209

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абелево слово 282
Абсолютное равновесие 70
Активный игрок 67
Алгорифм 50
— нахождения кратчайшего дерева 167
— — — пути 78, 79
— — наибольшего паросочетания (венгерский алгорифм) 112
— — — потока 85, 86, 292
— — — совместимого множества 192
— — наименьшего внешне устойчивого множества 51
— — — потока 89
— — потока, производящего наибольшую работу 258
— — совместимого с интервалом значений 95
— — пути выхода из лабиринта 76, 77
— — базы независимых циклов 168
— непосредственного выявления эйлера цикла 181
— построения наибольшего паросочетания 114
— — наименьшей опоры 114
Антисимметрический граф 14
Антиузел 135
- База векторного пространства 36
— графа 19
Бержа—Нормана—Рэйбина теорема 190
Бернштейна теорема 115
Бесконечная грань плоского графа 228
— транспортная сеть 96
Бесконечный граф 23, 24
Бинэ — Коши формула 170
Бистохастическая матрица 118
Бихроматический граф 39
Благоприятная (оптимальная) стратегия 72
Брэттона гипотеза 140
Булево сложение 152
— умножение 152
Бюджет транспортной сети 255
- Вектор-цикл 35
Векторное подпространство 35
Величина потока 82
— рассечения 126
Венгерский алгорифм 112
Верхняя грань 19
— структура 19
Вершина (точка) графа 12
Вес разбиения 279
Ветвь 135
Вещественное трехмерное пространство 9
Висячая вершина 165
Внешне устойчивое множество 48
Внутренне устойчивое множество 43
Вполне индуктивный граф 20
— унимодулярная матрица 153
— упорядоченное множество 27
Вход 98
— транспортной сети 82
Выигрыш игрока 68, 244
Выход 98
— транспортной сети 82
- Гамильтонов путь 120
— контур 120
— цикл 204
- Гамильтонова цепь 204
Генеалогическое (родословное) дерево 11
Географическая карта 38
Гипотеза Брэттона 140
— четырех красок 234, 236
Гранди функция 29
Граничные вершины дуги 12
Грань 227
Граф (определение) 11, 12
— антисимметрический 14
— без контуров 18
— сочленений 217
— бесконечный 23
— бихроматический 39
— вполне индуктивный 20

- Граф, двойственный данному 236, 239
 — индуктивный 20
 — конечный 23
 — локально конечный 23
 — минимально связный 135
 — однородный 198
 — плоский 38, 227, 238
 — полный 14
 — прогрессивно конечный 23
 — — ограниченный 23
 — простой 51, 88, 104
 — псевдосимметрический 182
 — регрессивно конечный 24
 — — ограниченный 24
 — связный 15
 — сильно связный 14
 — симметрический 14
 — структурный 19
 — топологический 227, 238
 — тотальный 18
 — транзитивный 18
 — частичный 12
 — ab -плоский 76
 — Γ -конечный 22
 — Γ^{-1} -конечный 22
 — Γ -ограниченный 22
 — h -связный 223
 — p -хроматический 37
 — S -топологический 238
 Группа подстановок 276
- Двоичная запись числа 31
 Двойственная строчка 99
 Двойственный граф 236, 239
 Декартово произведение 8
 Дерево 165
 Дефицит простого графа 108
 Диаметр графа 138
 Динамические программы 79
 — сети 83
 Дирихле задача 262
 Дирихле—Неймана задача 262
 Длина дуги графа 78
 — пути графа 13
 — ребра графа 166
 Дополнительная матрица 142
 Дуга (графа) 12
- Емкость графа 47
- Задача Куайна 193
 — Купманса 266
 — о бомбардировке путей сообщения 222
- Задача о волке, козе и капусте 76
 — — воспитанниках и воспитанницах 104
 — — восьми ферзях 43
 — — кёнигсбергских мостах 179
 — — книгах 123
 — — коне Аттилы 221
 — — котловане и насыпи 251
 — — лидере 147
 — — назначении лиц на должности 104
 — — нахождении наименьшего покрытия 192, 193
 — — прогулке молодых девушек 195
 — — пяти ферзях 49
 — — пятнадцати девушках 44
 — — разбиении прямоугольника на квадраты 262
 — — распределении товара по транспортной сети 252
 — — складе 253
 — — трех городах и трех источниках снабжения 227, 230
 — — урезанной шахматной доске 194
 — — ходе шахматного коня 122
 — — часовых 49
 — — шести красных дисках 49
 — об информационной емкости множества сигналов 46
 — — оптимальном назначении лиц 252
 — — экскурсии 100
- Замкнутая поверхность 238
 Замкнутое кругосветное путешествие 120
 Заходящая (в вершину, в множество) дуга 13
 — (в множество вершин) цепь 187
- Игра 61, 67, 243
 — в бридж 245
 — Ним 61, 68
 — — порядка p 64
 — с полной информацией 67, 245
 — — совершенной информацией 245
- Игрок 67
 Избыток 261
 Изолированная вершина (точка) 98, 165
 Индекс положения игры 243
 Инцидентность 13
 Исходящая (из вершины, из множества) дуга 13
- Квазипорядок 17
 — определенный графом 17

- Кёнига—Оре теорема 111
 Кёнига теорема о бихроматических графах 39
 Кёнига—Холла теорема 104, 108
 Класс эквивалентности 9
 Классы транзитивности 276, 277
 Клика 44
 Код 46
 Комбинированная стратегия 246
 Композиция отображений 10
 Компонента (связности) 15
 Конец дуги 12
 Конечная грань плоского графа 228
 Конечный граф 23
 Контур 13
 Край грани 227
 Куна—Бёрча теорема 246
 Кусок графа 220, 231
 — — внешний 232
 — — внутренний 232
- Лабиринт** 75
 Лапласа формула 170
 Латинские квадраты 107
 Лемма Цорна 20
 — Эррера 199
 Линейная конфигурация 170
 Линейно зависимые векторы 36
 — независимые векторы 35
 Линейные программы 41, 81, 84, 190, 249, 250
- Мажоранта** 17
 Максимальный элемент 20
 Матрица инцидентий для дуг 153
 — — ребер 153
 — смежности p -графа 142
 Менгера теорема 217
 Минимально связный граф 135
 Минимальный кусок 220
 — элемент 20
 Миноранта 18
 Многочленный коэффициент 285
 Множество 7
 — изоляции 221
 — информации 243
 — сочленения 221
 Моноид 174
 Мультиграф 34
- Наибольший элемент множества** 18
Наименьший элемент множества 18
 Напоминание 246
 Насыщенная дуга 86
 Начало графа 186
 — дуги 12
- Недостижимая вершина 186, 195
 Независимые циклы 35
 Незамкнутое кругосветное путешествие 121
 Ненасыщенная вершина 112, 190, 194
 Неприводимая вершина 66
 Несравнимые вершины 109
 Нижняя грань 19
 — структура 19
 Нормальная форма игры 245
- Обобщенная сумма матриц** 150
Обобщенное произведение матриц 150
 — сложение чисел 150
 — умножение чисел 150
 Образ 10
 Обратное отображение 10
 Объединение 8
 Однородный граф 198
 Ожидание выигрыша 244, 246
 Опора 200, 268
 — оптимальная 266
 — простого графа 109
 Ориентируемая поверхность 238
 Основной вероятностный закон (в игре) 243
 Отклонение 131
 Отклоненность 131
 Отношение порядка 18
 Отображение многозначное 10
 — однозначное 10
 Ощипывание графа 220
- Паросочетание произвольного графа** 194
 — простого графа 104
 Пассивный игрок 67
 Перемещение 101
 Пересечение 8
 Перешеек 207
 Периферийная точка 131
 Перифероидная точка 216
 Петерсена—Галлаи теорема 188
 Петерсена—Эррера теорема 209
 Петля 13
 Планирование неполных блоков 89
 Плоский граф 38, 227
 — — топологический 227, 238
 Поверхность 238
 Погоня 69
 Подграф 12
 Подигра 68
 Подмножество 7
 Подстановка 275
 — единичная 275
 Поединок 72

- Покрытие графа 88, 192
 Полное паросочетание 112
 Полный граф 14
 — поток 86
 Положение игры 67, 243
 Полустепень захода вершины 98
 — исхода вершины 98
 Понтрягина—Куратовского теорема 231
 Порядковая функция графа 28
 Порядковое (трансфинитное) число 27
 Порядок 18
 — вершины графа 28
 Поток 82
 — совместимый с избытками 261
 — — — множеством значений 89
 Потенциальная функция графа 262
 Потребность вершины, множества 90
 Правило Тарри 77
 — игры 67, 243
 Прадерево 19, 173
 Предшествующая вершина 17
 Проводимость дуги 262
 Прогрессивно конечный граф 23
 — ограниченный граф 23
 Произведение графов 30, 46
 Пропускная способность дуги 82
 — — разреза 85
 Простая цепь 15
 Простой граф 51, 88, 104
 — путь 13
 — цикл 15
 Псевдосимметрический граф 182
 Пустое множество 7
 Путь (в графе) 13

 Работа потока 255
 Равновесие (в игре) 70, 244
 Радиус графа 132
 — — ненаправленный («радиоид») 216
 Радоев теорема 25
 Разбиение (множества) 9
 — в смысле теории чисел 279
 Размерность отображения 282
 — разбиения 279
 Разность потенциалов 261
 Разрез (транспортной сети) 85
 Рассечение графа 126
 Расстояние 131
 — между вершинами 215
 Ребро графа 14
 — мультиграфа 34
 Регрессивно-конечный граф 24
 Регрессивно-ограниченный граф 24
 Регулярность отношения 276
 — подстановки 276

 Результат игры 72
 Рейни проблема 18
 Ричардсона теорема 56
 Розетка 135
 Родословное (генеалогическое) дерево 11
 Род поверхности 239

 Связный граф 15
 Сеть коммуникаций 215
 Сигналы 46
 Сила игрока 149
 — — итерированная порядка p 148
 Сильно связный граф 14
 Сильные вершины 186, 195
 — дуги 112
 — ребра 186, 189, 207
 Симметрическая группа 277
 Симметрический граф 14
 Симплекс-метод 42, 85
 Слабые вершины 186, 195
 — дуги 112
 — ребра 186, 189, 207
 Следующая вершина 17
 Слово 282
 Смежные вершины 13
 — грани 227, 228
 — дуги 12
 Смешанная вершина 186, 195
 Совершенная информация 245
 Совершенное паросочетание 194
 Совершенный прямоугольник 262
 Совместимость множества ребер с данной функцией 189
 Сопротивление дуги 262
 Сопряженная эквивалентность 279
 Сопряженное отображение 281
 Составная цепь 15
 Составной путь 13
 — цикл 15
 Сохранное отображение 47
 Социограммы 147
 Способность бюджета 256
 Старшинство 14
 Степень вершины 180
 — отображения 281
 Стратегия 69, 244
 Строго предшествующая вершина 17
 — следующая вершина 17
 Структурное отношение порядка 19
 Структурный граф 19
 Стягивание множества вершин 135
 Сумма графов 30
 — порядка p игр Ним 64
 Схема информации 183
 — коммуникаций 14

 Татта теорема 213

- Теорема Аардена-Эренфеста — де Брёйна 183
— Амицура — Левицкого 185
Теорема Бержа—Нормана—Рэйбина 190
— Бержа о бесконечных транспортных сетях 115
— — — — — наибольшем внутренне устойчивом множестве 201
— Бернштейна 115
— Биркгофа — фон Неймана 119
— Бэблера 206
— Гейла 92
— Гофмана 93
— Дирака 124
— Жордана (о центроидах графа) 216
— Кёнига 112
— — о бихроматических графах 39
— — — — — гамильтоновом пути 123
— — — — — последовательностях 24
— Кёнига—Оре 111
— Кёнига—Холла 104, 108
— Куна—Бёрча 246
— Менгера 217
— фон Неймана—Нэша 246
— о полустепенях 98
— Перрона—Фробениуса 149, 150
— Петерсена 206
— Петерсена—Галлаи 188
— Петерсена—Эррера 209
— Понтрягина—Куратовского 231
— Пуанкаре—Веблена—Александера 160
— Радо 25
— Ричардсона 56
— Руа 135
— Татта 213
— — о совершенном паросочетании 198
— Татта—Бержа 197
— Татта—Ботта 176
— Таусски 265
— Тэта 238
— Уитни 224
— Форда—Фалкерсона 87
— Харди—Литтлвуда—Пойа 100
— Хеллера 156
— Хеллера—Томпкинса—Гейла 153
— Цермело—фон Неймана 70
Тип отображения 281
— слова 282
Топологический граф 227, 238
Тотальный граф 18
— квазипорядок 18
Точка 7
— (вершина) графа 12
Точка простого сочленения 215
— сочленения 215
— равновесия (в игре) 244
Транзитивная группа 277
— эквивалентность 275, 277
Транзитивное замыкание (отображения) 10
Транзитивность 17
Транзитивный граф 18
Транспонированная матрица 142
Транспортная задача 250
— сеть 82
Трасса 137
Турнирная диаграмма 222
Удаленность вершины 215
Узел 135
Уитни теорема 224
Фактор графа 124
Фактор-множество 276
Фактороид 204
Фан Тан (простая игра Ним) 63
Форда—Фалкерсона теорема 87
Функция предпочтения 67, 243
Характеристическая функция множества 55
Хассе диаграмма 18
Ход (в игре) 67, 243
Хроматический класс графа 38
Хроматическое число графа 38
Центр графа 131
Центроид 216
Цепь 15
Цермело—фон Неймана теорема 70
Цикл графа 15
— подстановки 276
Циклическая группа 277
Циклический индекс 280
Цикломатическая матрица (вторая матрица инцидентий) 162
Цикломатическое число 34
Частичная игра 68
Частичный граф 12
— подграф 12
Чередующаяся цепь 186
Число внешней устойчивости 49
— внутренней устойчивости 43
— связности 221

Шахматы 68

Эйлера формула 228

Эйлера цепь 179

Эйлеров цикл 179

— контур 182

Эквивалентность 9

Эквивалентные вершины 17

Элемент множества 7

Элементарное произведение матриц
146

Элементарный контур 13

— путь 13

— цикл 15

Эффективное предпочтение 53

Ядро графа 53*ab*-плоский граф 76 Γ -конечный граф 22 Γ^{-1} -конечный граф 22 Γ -ограниченный граф 22*d*-сумма 31

— трансфинитных чисел 32

p-граф 98*p*-хроматический граф 37*h*-связный граф 223*S*-топологический граф 238

2-граф, 3-граф 34

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Основные определения	7
Множества и многозначные отображения	7
Граф. Пути и контуры	11
Цепи и циклы	14
Глава 2. Предварительное изучение квазиупорядоченности	17
Квазипорядок, определяемый графом	17
Индуктивный граф и базы	19
Глава 3. Порядковая функция и функция Гранди для бесконечного графа	23
Общие соображения относительно бесконечных графов	23
Порядковая функция	27
Функции Гранди	29
Операции над графами	30
Глава 4. Основные числа теории графов	34
Цикломатическое число	34
Хроматическое число	37
Число внутренней устойчивости	43
Число внешней устойчивости	48
Глава 5. Ядра графа	53
Теоремы существования и единственности	53
Приложение к функциям Гранди	59
Глава 6. Игры на графе	61
Игра Ним	61
Общее определение игры (с полной информацией)	67
Стратегии	69
Глава 7. Задача о кратчайшем пути	75
Процессы по этапам	75
Некоторые обобщения	78
Глава 8. Транспортные сети	82
Задача о наибольшем потоке	82
Задача о наименьшем потоке	88
Задача о потоке, совместимом с множеством значений	89
Бесконечные транспортные сети	96

Глава 9. Теорема о полустепенях	98
Полустепени исхода и захода	98
Глава 10. Паросочетание простого графа	104
Задача о наибольшем паросочетании	104
Дефицит простого графа	108
Венгерский алгоритм	112
Обобщение на бесконечный случай	114
Приложение к теории матриц	117
Глава 11. Факторы	120
Гамильтоновы пути и гамильтоновы контуры	120
Нахождение фактора	124
Нахождение частичного графа с заданными полустепенями	128
Глава 12. Центры графа	131
Центры	131
Радиус	132
Глава 13. Диаметр сильно связного графа	135
Общие свойства сильно связных графов без петель	135
Диаметр	138
Глава 14. Матрица смежности графа	142
Применение обычных матричных операций	142
Задачи на подсчет	144
Задача о лидере	147
Применение булевых операций	150
Глава 15. Матрицы инцидентий	153
Вполне унимодулярные матрицы	153
Вполне унимодулярные системы	158
Цикломатические матрицы	161
Глава 16. Деревья и прадеревья	165
Деревья	165
Аналитическое исследование	170
Прадеревья	173
Глава 17. Задача Эйлера	179
Эйлеровы циклы	179
Эйлеровы контуры	182
Глава 18. Паросочетание произвольного графа	186
Теория чередующихся цепей	186
Нахождение частичного графа с заданными степенями вершин	189
Совершенное паросочетание	195
Приложение к числу внутренней устойчивости	200
Глава 19. Фактороиды	204
Гамильтоновы циклы и фактороиды	204
Необходимое и достаточное условие существования фактороида	211
Глава 20. Связность графа	215
Точки сочленения	215
Графы без сочленений	217
h -связные графы	221

Глава 21. Плоские графы	227
Основные свойства	227
Обобщение	238
Добавления	241
I. Об общей теории игр	243
II. О транспортных задачах	250
III. Об использовании понятия потенциала в транспорт- ных сетях	261
IV. Нерешенные задачи и недоказанные предположения . . .	270
V. О некоторых основных принципах подсчета (Ж. Риге) . . .	275
VI. Дополнения к русскому переводу (А. А. Зыков и Г. И. Кожухин)	289
Литература	293
Теория графов и книга К. Бержа (<i>послесловие к русскому пе- реводу</i>)	303
Указатель символов	308
Именной указатель	309
Предметный указатель	311

К. Берг
ТЕОРИЯ ГРАФОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Художник *В. П. Заикин*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *А. Г. Резоухова*

Сдано в производство 27/VI-1961 г.
Подписано к печати 14/V-1962 г.
Бумага 60×90¹/₁₆ = 10 бум. л.
20 печ. л.
Уч.-изд. л. 18. Изд. № 1/0245
Цена 1 р. 46 к. Зак. 2638.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза
Ленинград, Измайловский пр., 29.

